修士論文 要旨

k-劣モジュラ最大化の乱択法の改良と脱乱択化

数理情報学専攻 48166204　大島　宏希

指導教員　定兼　邦彦　教授

1　はじめに

劣モジュラ性は組合せ最適化や確率，情報理論でも現れる基本的な性質の一つであり，劣モジュラ関数は機械学習や施設配置問題などにも現れる．たとえばグラフのカット関数やマトロイドのランク関数は劣モジュラ関数である．

定義 1. 集合関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ が任意の $S \subseteq T \subseteq V$, $e \notin T$ に対して

$$f(S \cup \{e\}) - f(S) \geq f(T \cup \{e\}) - f(T)$$

を満たすとき f は劣モジュラ関数であるという．

劣モジュラ最大化は，最大カット問題や，施設配置問題を含む問題になっている．最小化が多項式時間で可能なこと [4] である一方，無制約劣モジュラ最大化は，NP 困難であることが知られている．したがってアルゴリズムは近似比改善を目的としている．またその多くは確率的アルゴリズムになっている．

現在では，二つの暫定的な集合を用いた貪欲法による, 乱択 1/2-近似アルゴリズム [2] が知られている．無制約最大化に関しては，$(1/2 + \epsilon)$-近似には指数回の関数値呼び出しが必要であることが示されている [3] ため，これが近似比の面では最良といえる．また，上記の乱択手法を脱乱択化した，決定論的 1/2-近似アルゴリズム [1] もまた存在している．

k-劣モジュラ関数 [5] は劣モジュラ関数及び双劣モジュラ関数の拡張として導入された．k-劣モジュラ関数は $(k+1)^V := \{(X_1, ..., X_k) \mid X_i \subseteq V \ (i \in [k]), X_i \cap X_j = \emptyset \ (i \neq j)\}$ 上の関数 $f : (k+1)^V \to \mathbb{R}$ であるが，詳細な定義はここでは省略し，等価な性質を次章で与える．

$k = 2$ である双劣モジュラ関数最大化アルゴリズム [6, 8] の研究を経て，一般の k に対する乱択アルゴリズム [8] も示された．現在では，Iwata, Tanigawa, and Yoshida [7] により，非単調な場合の乱択 1/2-近似アルゴリズム，単調な場合の乱択 $\frac{k}{2k-1}$-近似アルゴリズム，そして単調な場合 $(\frac{k+1}{2k} + \epsilon)$-近似には指数回の関数値呼び出しが必要であることが示されている．

2　k-劣モジュラ最大化の先行研究

k-劣モジュラ関数には，定義に等価な表現として次の定理 [8] が存在する．但し $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ である．

定理 2. $\boldsymbol{x} = (X_1, ..., X_k), \boldsymbol{y} = (Y_1, ..., Y_k) \in (k+1)^V$ に対し，$(k+1)^V$ 上の半順序 $\preceq$ を

$$\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y} \overset{\text{def}}{\iff} X_i \subseteq Y_i \ (\forall i \in [k])$$

と定める．また任意の $\boldsymbol{x} = (X_1, ..., X_k)$ に対し

$$\begin{aligned}\Delta_{e,i} f(\boldsymbol{x}) = f(X_1, ..., X_{i-1}, X_i \cup \{e\}, X_{i+1}, ..., X_k) \\ - f(X_1, ..., X_k)\end{aligned}$$

と定める．$f : (k+1)^V \to \mathbb{R}$ が k-劣モジュラ関数であることの必要十分条件は orthant submodularity

$$\Delta_{e,i} f(\boldsymbol{x}) \geq \Delta_{e,i} f(\boldsymbol{y}) \ \ (\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}, \ e \notin \bigcup_{l \in [k]} Y_l)$$

および pairwise monotonicity

$$\Delta_{e,i} f(\boldsymbol{x}) + \Delta_{e,i'} f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ \ (e \notin \bigcup_{l \in [k]} X_l, \ i \neq i')$$

を満たすことである．

pairwise monotonicity は $k = 1$ の劣モジュラ関数にはない特徴である．また k-劣モジュラ関数の単調性は

$$\Delta_{e,i} f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \ \ (e \notin \bigcup_{l \in [k]} X_l)$$

として定義される．これは pairwise monotonicity よりも強い条件になっている．

先行研究 [6, 8] から使用されている枠組み (アルゴリズム 1) を考える．V の要素に 1 から n まで番号を定め，t 番目の要素を $e^{(t)}$ と書くこととする．いずれの先行研究も，$y_i^{(t)} = \Delta_{e^{(t)},i} f(\boldsymbol{s}^{(t-1)})$ ををもとに，確率分布 $\{p^{(t)}\}$ を決定する．

3　脱乱択化

脱乱択化は，$k = 1$ の場合に行われた手法 [1] を，乱択単調 k-劣モジュラ最大化アルゴリズム [7] に適用できるよう拡張して行った．提案アルゴリズムは，次の定理を満たす．

Algorithm 1 乱択 k-劣モジュラ最大化の枠組み [6, 8]

1: $\boldsymbol{s} \leftarrow \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{s} \in \{0, 1, ..., k\}^V)$
2: **for** $t = 1, ..., n$ **do**
3: 　$\{1, ..., k\}$ 上の確率分布 $\{p^{(t)}\}$ を定める．
4: 　$\Pr[\boldsymbol{s}(e^{(t)}) = i] = p_i^{(t)}$なる確率の下 $\boldsymbol{s}(e^{(t)})$ を決定する
5: **end for**
6: **return** $\boldsymbol{s}$

定理 3. 提案した決定論的アルゴリズムは，単調関数について $\frac{k}{2k-1}$-近似，$k \geq 2$ である非単調関数について $\frac{k}{3k-2}$-近似となる．また，関数値呼び出し回数は $O(n^2k^2)$ 回である．

本研究では，提案アルゴリズムの関数値呼び出し回数以外での計算量についても，解析を行った．

4　乱択法の改良

本研究では，$k \geq 3$ である非単調関数について，乱択法の近似比を先行研究の 1/2 から改善した．まず，$k = 3$ の場合について述べる．$y_1 \geq y_2 \geq y_3$ とし，$\beta := \frac{y_2}{y_1}, \gamma := \frac{y_3}{y_1}$ と定める．次の分布 $\{p_i\}$ を考える．

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\beta}{1+\beta}, p_2 = \frac{1}{1+\beta}, p_3 = 0 & (\gamma < 0) \\ p_1 = \frac{1+\gamma}{1+\beta+2\gamma}, p_2 = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta+2\gamma}, p_3 = 0 & (\gamma \geq 0, h(\beta,\gamma) > 0) \\ p_1 = \frac{2-\beta+\gamma}{2+\beta+3\gamma}, p_2 = p_3 = \frac{\beta+\gamma}{2+\beta+3\gamma} & (\gamma \geq 0, h(\beta,\gamma) \leq 0) \end{cases} \tag{1}$$

但し $h(\beta,\gamma) = \frac{1-\beta-\gamma}{2} + \frac{\beta}{1+\gamma} - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$ とする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4. アルゴリズム 1 において，$t = 1, \ldots, n$ の確率分布を (1) に従って定める．このとき，アルゴリズムの出力を $\boldsymbol{s}$，3-劣モジュラ関数 f を最大化する解を $\boldsymbol{o}$ とする．この時 $\mathbb{E}[f(\boldsymbol{s})] \geq \frac{\sqrt{17}-3}{2} f(\boldsymbol{o})$ が成り立つ．

この近似比は，アルゴリズム 1 の分布を工夫し，各反復での改善を評価するという，今回の枠組みでは最良になっている．

続いて，$k \geq 3$ の場合について，次の定理が成り立つ．

定理 5. $k \geq 3$ なる非単調 k-劣モジュラ関数について，$\frac{k^2+1}{2k^2+1}$-近似を達成する乱択アルゴリズムが存在する．

証明はアルゴリズム 1 の枠組みをもとに，実際に達成するアルゴリズムを構成して行った．提案手法では，確率分布 $\{p^{(t)}\}$ を $k+1$ 通りから適切に選択する．この近似比はタイトではなく，(2) を満たす最大の ϵ に対し，

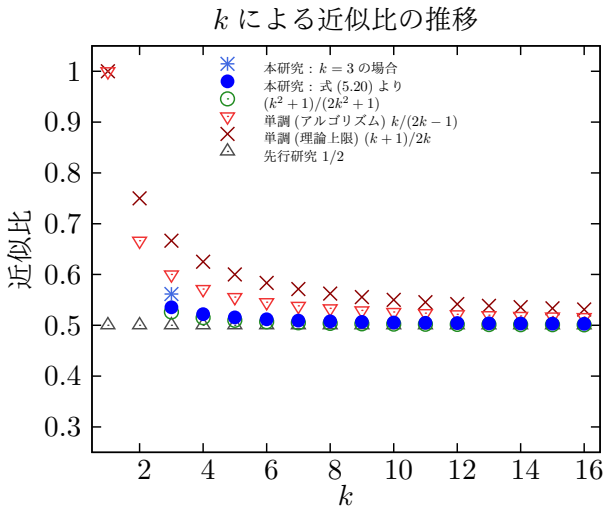

図 1. k の変化と近似比の比較．

$\frac{1+\epsilon}{2+\epsilon}$ と書ける．図 1 は (2) から得られる近似比，$\frac{k^2+1}{2k^2+1}$ 及び先行研究での近似比をプロットしたものである．

$$k + \epsilon k(k - 1 - \ln k) \geq (k-1)\left\{(1+\epsilon)^k + \epsilon(1+\epsilon)^{k-2}\right\} \tag{2}$$

参考文献

[1] N. Buchbinder and M. Feldman. Deterministic algorithms for submodular maximization problems. In *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 392–403. SIAM, 2016.

[2] N. Buchbinder, M. Feldman, J. Naor, and R. Schwartz. A tight linear time (1/2)-approximation for unconstrained submodular maximization. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 44, No. 5, pp. 1384–1402, 2015.

[3] U. Feige, V. S. Mirrokni, and J. Vondrák. Maximizing non-monotone submodular functions. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 40, No. 4, pp. 1133–1153, 2011.

[4] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, Vol. 1, No. 2, pp. 169–197, 1981.

[5] A. Huber and V. Kolmogorov. Towards minimizing k-submodular functions. In *International Symposium on Combinatorial Optimization*, pp. 451–462. Springer, 2012.

[6] S. Iwata, S. Tanigawa, and Y. Yoshida. Bisubmodular function maximization and extensions. Technical report, METR 2013-16, The University of Tokyo, 2013.

[7] S. Iwata, S. Tanigawa, and Y. Yoshida. Improved approximation algorithms for k-submodular function maximization. In *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 404–413. SIAM, 2016.

[8] J. Ward and S. Živný. Maximizing k-submodular functions and beyond. *ACM Transactions on Algorithms*, Vol. 12, No. 4, pp. 47:1–47:26, 2016.