

リスク鋭敏型分布を用いた状態空間モデルの オンラインパラメータ推定

数理情報学専攻 48166233

翁 啓翔

指導教員

駒木 文保 教授

1 はじめに

リスク鋭敏型フィルタを用いた状態空間モデルにおけるパラメータのオンライン推定方法について考える。リスク鋭敏型フィルタの概要について紹介し、どのようにパラメータ推定に応用するかについて述べる。以下では x_t, y_t は次のモデルに従うものとする：

$$x_1 \sim f_\theta(\cdot | \emptyset) \text{ and } x_t | (x_{t-1} = x) \sim f_\theta(\cdot | x),$$

$$y_t | (x_t = x) \sim g_\theta(\cdot | x).$$

2 既存研究

2.1 リスク鋭敏型フィルタ

線形ガウスモデルにおける状態変数を推定する代表的な手法であるカルマンフィルタは真の状態変数との2乗誤差の期待値を最小化するものとして書き表される。この2乗誤差を一般化することで得られるリスク鋭敏型フィルタ (Risk-Sensitive Filter) がある。

$\alpha > 0$ をリスク鋭敏パラメータと呼び、パラメータ α のもとで、観測 $y_{1:s}$ を用いた x_t を $\hat{x}_{t|s}^{(\alpha)}$ とおくことにする。 V_k を正定値対称行列として、リスク鋭敏型フィルタは以下のように定義される：

$$J(x_{1:t}, \hat{x}_{1:t-1}^{(\alpha)}, \xi) := \exp\left(\frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{t-1} \|x_k - \hat{x}_{k|k}^{(\alpha)}\|_{V_k}^2 + \frac{\alpha}{2} \|x_t - \xi\|_{V_t}^2\right)$$

$$\hat{x}_{t|t}^{(\alpha)} := \operatorname{argmin}_{\xi} \mathbb{E}[J(x_{1:t}, \hat{x}_{1:t-1}^{(\alpha)}, \xi) | y_{1:t}]$$

このようにして求まるリスク鋭敏型フィルタは仮定したシステムの分布が真の分布からずれている時、フィルタによる状態変数の推定誤差は通常のフィルタよりも経験的に小さくなるという性質があることが Boel et al. [2] によって指摘されている。このことを数値的に表したのが図1である。

また、 x_t の推定値のみならず、以下のようにその分布も定義することが出来る [1]。ただし、 $\gamma_k^{(\alpha)}(x_k, \xi) := \exp\left(\frac{\alpha}{2} \|x_k - \xi\|_{V_k}^2\right)$ とおく。

$$p_\theta^{(\alpha)}(x_t | y_{1:t-1}) \propto \int f_\theta(x_t | x_{t-1}) p_\theta^{(\alpha)}(x_{t-1} | y_{1:t-1}) dx_{t-1},$$

$$p_\theta^{(\alpha)}(x_t | y_{1:t}) \propto \gamma_t^{(\alpha)}(x_t, \hat{x}_{t|t}^{(\alpha)}) g_\theta(y_t | x_t) p_\theta^{(\alpha)}(x_t | y_{1:t-1})$$

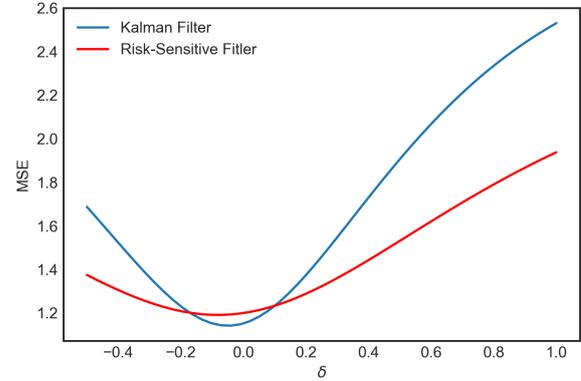


図1. カルマンフィルタとリスク鋭敏型フィルタの推定誤差の比較

2.2 対数周辺尤度最大化によるオンライン推定

次に y_1, y_2, \dots が逐次的に観測される場合に θ をオンラインで推定することを考える。Doucet & Tadic [3], Poyiadjis et al. [5] では粒子フィルタを用いて周辺対数尤度 $\log p_\theta(y_{1:t})$ を近似的にオンラインで最大化するアルゴリズムを提案した。各時刻での推定値 $\hat{\theta}_t$ に対して $p_{\hat{\theta}}(y_{1:t})$ を計算するには $O(t)$ の時間がかかるため、便宜的に次の擬似尤度関数 $p_{\hat{\theta}_{1:t}}(x_{1:t}, y_{1:t})$ を考える：

$$p_{\hat{\theta}_{1:t}}(x_{1:t}, y_{1:t}) := \prod_{k=1}^t f_{\hat{\theta}_k}(x_k | x_{k-1}) g_{\hat{\theta}_k}(y_k | x_k).$$

新たに $(x_{t+1}, y_{t+1}, \hat{\theta}_{t+1})$ が与えられるとき、と前の時刻までに計算された値と $t+1$ 時刻目に新たに観測された量の積を使って計算されるので、 $O(1)$ で更新されることがわかる。次にこの擬似尤度関数のパラメータに関する勾配を考える。 $x_{1:t}, y_{1:t}$ の擬似対数尤度関数の勾配は

$$\nabla_{\hat{\theta}_{1:t}} \log p_{\hat{\theta}_{1:t}}(x_{1:t}, y_{1:t}) = \sum_{k=1}^t \left\{ \nabla_{\hat{\theta}_k} \log f_{\hat{\theta}_k}(x_k | x_{k-1}) + \nabla_{\hat{\theta}_k} \log g_{\hat{\theta}_k}(y_k | x_k) \right\}$$

と定義する。ここで、フィッシャーの等式を用いると、擬似対数周辺尤度の勾配を S_t とおけば

$$S_t = \nabla_{\hat{\theta}_{1:t}} \log p_{\hat{\theta}_{1:t}}(y_{1:t})$$

$$= \int \left\{ \sum_{k=1}^t \left(\nabla \log f_{\hat{\theta}_k}(x_k | x_{k-1}) + \nabla \log g_{\hat{\theta}_k}(y_k | x_k) \right) \right\} \times p_{\hat{\theta}_{1:t}}(x_{1:t} | y_{1:t}) dx_{1:t}$$

となる．この関数を擬似スコア関数と呼ぶこととする．通常の最急降下法では $\nabla \log p_{\hat{\theta}}(y_{1:t})$ を更新方向としてパラメータを更新するが，オンライン推定では

$$\nabla \log p_{\hat{\theta}}(y_t | y_{1:t-1}) = \nabla \log p_{\hat{\theta}}(y_{1:t}) - \nabla \log p_{\hat{\theta}}(y_{1:t-1})$$

が平均的に $\nabla \log p_{\hat{\theta}}(y_{1:t}) / t$ になることから，これを確率的勾配とみなして更新方向とする．以上から次のアルゴリズムが得られる：

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{t+1} &= \hat{\theta}_t + \eta_t \nabla_{\hat{\theta}_{1:t}} \log p_{\hat{\theta}_{1:t}}(y_t | y_{1:t-1}) \\ &= \hat{\theta}_t + \eta_t \{S_t - S_{t-1}\}. \end{aligned}$$

3 本研究で提案するアルゴリズム

既存手法では $(x_{1:t}, y_{1:t})$ の対数尤度をフィルタ分布によって積分したものを更新方向としてパラメータを勾配法によって推定していた．積分に用いるフィルタ分布とは更新中のパラメータ $\hat{\theta}_t$ を用いて与えられるものである．仮に真のパラメータ θ^* をプラグインした時のフィルタ分布が $p_{\theta^*}(x_{1:t} | y_{1:t})$ が与えられたとして，この分布を用いて上記の更新方向を計算すると既存手法に比べ，早く真の値に収束することが観測された．

本研究ではリスク鋭敏型フィルタから誘導される誘導されるリスク鋭敏型予測分布 $p_{\hat{\theta}_t}^{(\alpha)}(x_{1:t} | y_{1:t})$ が従来用いられた用いられた分布 $p_{\hat{\theta}_t}(x_{1:t} | y_{1:t})$ よりも経験的に真のフィルタ分布に近いことを用いて，リスク鋭敏型予測分布を用いて期待値計算を行うアルゴリズムを提案した：

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{t+1} &= \hat{\theta}_t + \eta_t d_{\hat{\theta}_{1:t}}^{(\alpha)}(y_{1:t}), \\ d_{\hat{\theta}_{1:t}}^{(\alpha)}(y_{1:t}) &:= S_{\hat{\theta}_{1:t}}^{(\alpha)}(y_{1:t}) - S_{\hat{\theta}_{1:t-1}}^{(\alpha)}(y_{1:t-1}), \\ S_{\hat{\theta}_{1:t}}^{(\alpha)}(y_{1:t}) &:= \int \nabla_{\hat{\theta}_{1:t}} \log p_{\hat{\theta}_{1:t}}(x_{1:t}, y_{1:t}) \\ &\quad \times p_{\hat{\theta}_{1:t}}^{(\alpha)}(x_{1:t} | y_{1:t}) dx_{1:t} \end{aligned}$$

とパラメータを更新する手法を提案した．また，数値的には Poyiadjis et al. [5] によるパラメータの手法と Orguner et al. [4] のリスク鋭敏型の粒子フィルタを用いた計算を組み合わせることで提案手法を実装した．

数値実験では線形ガウスモデルと確率的ボラティリティモデルにおいてパラメータを推定する実験を行い，初期値によるものの両モデルにおいて既存手法より早く真のパラメータに収束する例があることが確認された (図 2, 3)．また，時系列モデルではないものの，状態変数が独立同一分布に従う潜在変数モデルの単純な場合において提案アルゴリズムが従来手法よりも早く真のパラメータに収束する解釈性のある理由を与えた．

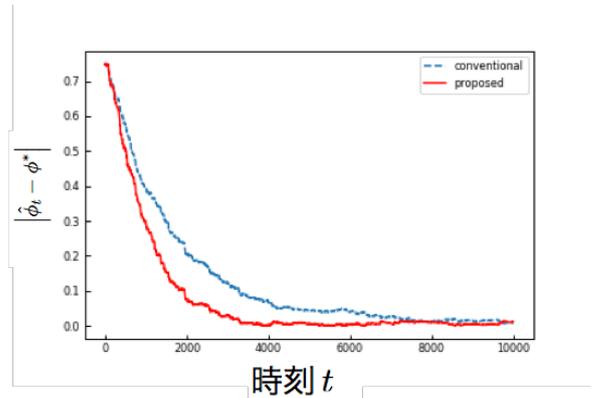


図 2. 線形ガウスモデル，初期値 $\phi_0 = 0.1$ ，真の値 $\phi^* = 0.85$ のときの収束の様子

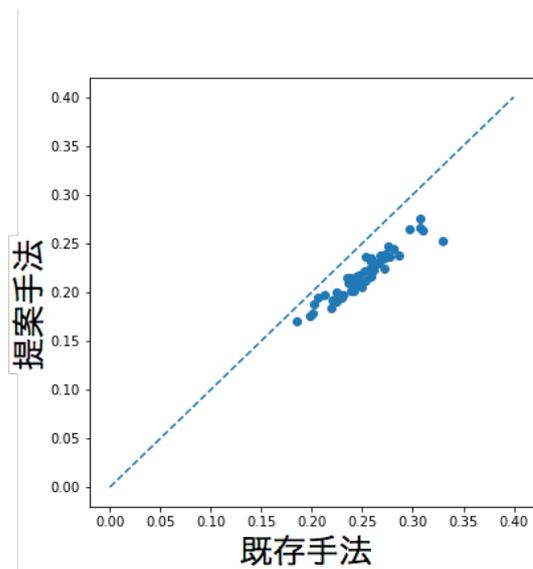


図 3. 線形ガウスモデル，初期値 $\phi_0 = 0.1$ ，真の値 $\phi^* = 0.9$ のとき，50 回系列を発生させた場合の各系列における誤差．縦軸：提案手法の誤差，横軸：既存手法の誤差

参考文献

- [1] S. Bhaumik, S. Sadhu, and T. Ghosal, “Alternative formulation of risk-sensitive particle filter,” in *Proceedings of 2006 Annual IEEE India Conference*, 2006, pp. 1–4.
- [2] R. Boel, M. James, and I. Petersen, “Robustness and risk-sensitive filtering,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 451–461, 2002.
- [3] A. Doucet and V. Tadic, “Parameter estimation in general state-space models using particle methods,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. 55, pp. 409–422, 2003.
- [4] U. Orguner and F. Gustafsson, “Risk-sensitive particle filters for mitigating sample impoverishment,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 5001–5012, 2008.
- [5] G. Poyiadjis, A. Doucet, and S. Singh, “Particle approximations of the score and observed information matrix in state space models with application to parameter estimation,” *Biometrika*, vol. 98, pp. 65–80, 2011.