修士論文 要旨

行列のハフニアンの $\mathrm{mod}\ 2^k$ 計算による組合せ最適化アルゴリズム

数理情報学専攻 48146220　難波 博之
指導教員　平井 広志 准教授

1　はじめに

本研究では，まず行列のハフニアンの $\mathrm{mod}\ 2^k$ 計算について扱い，それを用いて 2 つの組合せ最適化問題に対するアルゴリズムを構成する．

1 つめのテーマはホログラフィックアルゴリズムである．ホログラフィックアルゴリズムは Valiant [7] によって数え上げの文脈で提唱された手法である．本論文ではホラントを多項式とし，その次数のみに注目することで，最適化問題に対する手法を構成する．

2 つめのテーマは点素パスの詰め込み問題である．最短 2 点素パス問題と最短完全 T パス問題の共通の一般化である最短完全 $(A+B)$-パス問題を定式化し，ターミナル数が定数である場合について，ハフニアンの $\mathrm{mod}\ 2^k$ 計算を用いた乱択多項式時間アルゴリズムを与える．

2　行列のハフニアン

$2n \times 2n$ 対称行列 $S = (s_{ij})$ に対して，そのハフニアン $\mathrm{haf}\, S$ を以下のように定義する：

$$\mathrm{haf}\, S = \sum_{M} \prod_{(i,j)\in M} s_{ij}.$$

ここで，M は $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ の n 個のペアへの分割：$\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_n, j_n)\}$（ただし $i_1 < j_1$, $i_2 < j_2, \ldots, i_n < j_n$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$）全体を動く．ハフニアンはパフィアンの符号部分を除いたものである．

ハフニアンの計算は行列のパーマネントの計算を含んでおり，0-1 行列のパーマネントの計算は NP 困難である [6]．よって，ハフニアンを計算する問題は 0-1 行列に制限しても NP 困難である．しかし，本研究でハフニアンを $\mathrm{mod}\ 2^k$ で計算することなら多項式時間で可能であることを示す．

定理 1. 任意の定数 k に対して，各成分の次数が N 以下である $2n \times 2n$ の一変数多項式行列のハフニアンを $\mathrm{mod}\ 2^k$ で計算することは，n と N に関する多項式時間で可能である．

定理 1 の証明は Valiant [6] によるパーマネントの $\mathrm{mod}\ 2^k$ 計算が多項式時間で可能であることの証明に基づく．

3　ホログラフィックアルゴリズム

Valiant [7] によって提唱されたホログラフィックアルゴリズムとは，解きたい数え上げ問題をホラントの形で定式化し，ホログラフィック変換を施すことで最終的に完全マッチングの数え上げ問題に帰着させる手法である．完全マッチングの数え上げ問題は，一般には#P 困難と呼ばれる非常に難しい問題のクラスに属するが，平面グラフの場合には多項式時間で解けることが知られている [4]．本研究ではこの手法を最適化問題に応用する．

本研究で扱う問題の枠組みについて述べる．入力は，二部グラフ：$G = (U, V, E)$ および各頂点に付値された関数：$f_u : 2^{\delta u} \to \mathbb{Z}[x]$ $(\forall u \in U)$，$f_v : 2^{\delta v} \to \mathbb{Z}[x]$ $(\forall v \in V)$ である．問題の出力（計算したい量）は，ホラント

$$\langle g, f \rangle = \sum_{t \subseteq E} \prod_{u \in U} f_u(t) \prod_{v \in V} g_v(t)$$

の次数である．多くの最適化問題が，上記のように定式化することができる．例えば，最大（重み）マッチング問題，できるだけ少ない頂点を除いて二部グラフにするという NODE-BIPARTITION，MAX-SAT など多くの問題がこの形で記述できる．ホラントの次数を求めるために，k をグラフのサイズに依存しない定数として，ホラントの係数を $\mathrm{mod}\ 2^k$ で計算することをとりあえずの目標とする．最高次の係数が 2^k の倍数でないことが保証されていればホラントを $\mathrm{mod}\ 2^k$ で計算することで次数を求めることができる．そして，最適解の一意性が保証されている状況では多くの場合最高次の係数は 1 や 2 などの小さな定数となる．

本研究では，以下の条件を満たす問題 P に対して，ホラントを $\mathrm{mod}\ 2^k$ で多項式時間で計算する方法を与える．ここで，問題 P において，二部グラフ $G = (U, V, E)$ の全ての頂点の次数は 3 とする．また，U の頂点 u に付値する関数は $f_u = (x^{a(u)}, x^{b(u)}, x^{c(u)}, x^{d(u)}, x^{d(u)}, x^{c(u)}, x^{b(u)}, x^{a(u)})^\top$ とする．ただし，$a(u), b(u), c(u), d(u)$ は 0 以上の整数で，各 $u \in U$ に対して，$a(u) = b(u)$ かつ $c(u) = d(u)$，または $a(u) = c(u)$ かつ $b(u) = d(u)$，または $a(u) = d(u)$ かつ $b(u) = c(u)$ とする．さらに，V の頂点 v に付値す

る関数は $g_v = (1,0,0,0,0,0,0,1)$ とする．関数値の次数の最大値 $\max_u(\max\{a(u),b(u),c(u),d(u)\})$ を N と表記する．

定理 2. k を正の整数とする．問題 P において，$\langle g,f\rangle \bmod 2^k$ は，入力長と N に関する多項式時間で計算可能である．

問題 P においてホラントの次数を求める問題は値付き制約充足問題（V-CSP）の特殊ケースである．すなわち，提案手法は V-CSP の特殊ケースに対して，最適解の個数が高々定数個な場合に多項式時間解法を与えたとみなせる．ただし，現状では条件がかなり厳しくこの手法が使える V-CSP の問題は限定的である．

4　最短完全 $(A+B)$-パス問題

無向グラフ $G=(V,E)$ およびターミナルの集合 $T\subseteq V$ に対して，端点がいずれも T に属するパスを T パスと呼ぶ．また，互いに点素な $|T|/2$ 本の T パスの集合を完全 T パスパッキングと呼ぶ．完全 T パスパッキングのパスの長さの和の最小値を求める問題を，最短完全 T パス問題と呼ぶ．最短完全 T パス問題は，Gallai [2] の手法を用いて最小重み完全マッチングに帰着することで，多項式時間で解くことができる．

また，無向グラフ $G=(V,E)$ およびターミナル $s_1,t_1,s_2,t_2\subseteq V$ が与えられたときに，(s_1,t_1) を端点とするパス P_1 と (s_2,t_2) を端点とするパス P_2 のペアで互いに点素なものの長さの和の最小値を求める問題を最短 2 点素パス問題と呼ぶ．最短 2 点素パス問題に対する多項式時間解法は知られていなかったが，近年，Björklund–Husfeldt [1] は行列のパーマネントの $\bmod 4$ 計算，および分離補題 [5] を用いた乱択多項式時間アルゴリズムを構成した．

本研究では，最短完全 T パス問題と最短 2 点素パス問題の共通の一般化である最短完全 $(A+B)$-パス問題を扱う．ここで，ターミナル $T\subseteq V$ およびその分割 $\{A,B\}$ に対して，始点と終点がともに A に属するまたはともに B に属するパスを $(A+B)$-パスと呼ぶ．また，互いに点素な $(|A|/2+|B|/2)$ 本の $(A+B)$-パスの集合を完全 $(A+B)$-パスパッキングと呼ぶ．完全 $(A+B)$-パスパッキングで用いる枝数が最小なものの枝数を求める問題を最短完全 $(A+B)$-パス問題と呼ぶ．

本研究の主結果は以下の定理である．

定理 3. n に関する多項式 $f(n)$ が存在して，最短完全 $(A+B)$-パス問題を解く $O(f(n)^{2|T|})$ 時間の乱択アルゴリズムが存在する．特に $|T|$ が定数のとき，乱択多項式時間アルゴリズムが存在する．

本研究で構成する乱択多項式時間アルゴリズムは，[2] による T パス問題のマッチングへの帰着方法および [1] による最短 2 点素パスに対する手法を融合し，さらにハフニアンの $\bmod 2^k$ 計算を用いたものである．具体的には，

$$\mathrm{haf}\, S' = \sum_{\mathcal{P}\in\Lambda}(\pm 2^{\frac{|T|}{2}} x^{l(\mathcal{P})} + f_{\mathcal{P}}(x))$$

を満たす多項式行列 S' を構成し，これを $\bmod 2^{\frac{|T|}{2}+1}$ で計算するという手法である．ただし，Λ は完全 $(A+B)$-パスの集合であり，$f_{\mathcal{P}}(x)$ は，0 または $x^{l(\mathcal{P})}$ 次よりも高次の項のみからなる多項式である．また $l(\mathcal{P})$ は $\mathcal{P}$ で用いる枝数である．

さらに，本研究では，ターミナル数が定数とは限らない一般の問題設定においては，完全 $(A+B)$-パスパッキングの存在判定が NP 完全であることを示す．

定理 4. 完全 $(A+B)$-パスパッキングの存在判定は NP 完全である．

定理 4 の証明は辺素パスの問題設定における Hirai–Pap [3] の帰着方法に基づく．

参考文献

[1] A. Björklund and T. Husfeldt: Shortest two disjoint paths in polynomial time, *Proceedings of 41st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, Lecture Notes in Computer Science 8572, Springer-Verlag, Berlin, (2014), 211–222.

[2] T. Gallai: Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 12, (1961), 131–173.

[3] H. Hirai and G. Pap: Tree metrics and edge-disjoint S-paths, *Mathematical Programming* 147, (2014), 81–123.

[4] P. W. Kasteleyn: The statistics of dimers on a lattice, *Physica* 27, (1961), 1209–1225.

[5] K. Mulmuley, U. V. Vazirani and V. V. Vazirani: Matching is as easy as matrix inversion, *Combinatorica* 7, (1987), 105–113.

[6] L. G. Valiant: The complexity of computing the permanent, *Theoretical Computer Science* 8, (1979), 189–201.

[7] L. G. Valiant: Holographic algorithms, *SIAM Journal on Computing* 37, (2008), 1565–1594.