

# グラフ上の最適化問題に対するグラフ分解を用いた効率的解法と一般化メイクスパン最小化問題の計算量解析

数理情報学専攻 48146219 永山 恒彦

指導教員 定兼 邦彦 教授

## 1 はじめに

本稿は二部構成である．第 I 部では重み付き有向グラフ上で定義されるいくつかの問題に対し，グラフの二重連結成分や三重連結成分に関する分解を表す BC 木 (block cut tree) や SPQR 木 (SPQR tree) を用いた効率的な解法を提案する．ここでは以下の問題について述べる．

**最大流索引付け問題** 与えられたグラフに前処理を施して索引を構成し，索引を用いて与えられた二頂点間の最大流量を索引を用いて求める．

**最大流問題** グラフとグラフに含まれる二頂点が与えられ，二頂点間の最大流量を計算する．

第 II 部では，各枝  $e$  に対し正整数の重み  $c(e)$  が与えられた無向グラフ  $G = (V, E)$  上で定義される一般化メイクスパン最小化問題について考える．枝被覆  $E_c$  に対して， $\max_{v \in V} c(\delta_{E_c}(v))$  によって表される値を一般化メイクスパンという．ここで， $F \subseteq E$  に対し， $F$  に含まれかつ頂点  $v$  に接続する枝の集合を  $\delta_{E_c}(v)$  で表し， $c(F) := \sum_{e \in F} c(e)$  とする．一般化メイクスパン最小化問題とは，一般化メイクスパンを最小化する枝被覆を求める問題である．

## 2 最大流索引付け問題に関する既存研究

木幅が定数の有向グラフ  $G$  上の最大流索引付け問題については，Arikati et al. [2] により効率的な手法が提案された．ここで，有向グラフに対する木幅は枝の向きを無視して得られる無向グラフの木幅として定義する．

まず，索引を以下の手順で構成する．

- 幅が定数の木分解  $(T, \{X_i\})$  で， $T$  が二分木であるものを構成する．
- 各枝  $(i, j) \in E(T)$  に対して， $I_{ij}$  と  $I_{ji}$  を計算し，保持する．

ここで， $I_{ij}$  は以下のように定義する．あらかじめ各枝  $e \in E(G)$  をある節点  $i \in V(T)$  に対応させておくことにより， $T$  の点素な分割は  $G$  の枝素な分割を誘導

する．木  $T$  は枝  $(i, j)$  によって  $T_i, T_j$  に二分割される (節点  $i$  を含む部分木を  $T_i$  とする) ので，枝  $(i, j)$  はグラフ  $G$  の枝素な分割  $G_i, G_j$  を生む (ただし， $G_i$  は  $T_i$  に対応する部分グラフとする)． $I_{ij}$  は， $G_i$  の  $X_i$  を端子集合とする模倣ネットワーク (mimicking network) [4] とする． $I_{ij}$  の頂点数は  $2^{2^{|X_i|}}$  以下にできることが知られている．

次に， $s, t \in V(G)$  に対し，最大  $s$ - $t$  流量を以下の手順で計算する．

- $s \in X_i, t \in X_j$  なる  $i, j \in V(T)$  を一つずつ選び， $M_{ij}$  を計算する．
- $M_{ij}, I_{in_i}, I_{jn_j}$  を合成したネットワーク  $N'$  で最大  $s$ - $t$  フローを計算する．

ここで， $n_i, n_j$  は， $i$ - $j$  パスに含まれる節点で，それぞれ  $i, j$  に隣接する節点である．また，枝  $(i, n_i)$  と  $(j, n_j)$  を取り除くことによって得られる部分木のうち，節点  $n_i$  と  $n_j$  を含むものを  $T'$  とすると， $M_{ij}$  は， $T'$  に対応する  $G$  の部分グラフの， $X_{n_i} \cup X_{n_j}$  を端子集合とする模倣ネットワークとして定義される． $M_{ij}$  は木上積問合わせ (Tree Product Query) についての結果を用いることで，線形時間あるいはほぼ線形時間の前処理を施しておけば高速に計算できる [1, 3]．模倣ネットワークの性質より， $N'$  における最大  $s$ - $t$  流量はもとのネットワークにおける最大  $s$ - $t$  流量と等しく，更に木分解の幅は定数であるため， $N'$  は定数サイズのネットワークである．木上積問合わせの前処理をあらかじめ施しておくことで，以下の結果が従う．

**定理 1.** ([2]) 木幅が定数の有向グラフ上の最大流索引付け問題について，以下が成り立つ．ただし， $k \in \mathbf{Z}_{>0}$  はパラメタであり， $\lambda, \alpha$  は文献 [1] で定義される関数である．

- $O(n\lambda(k, n))$  時間の前処理で， $O(n\lambda(k, n))$  スペースの索引を構成し，定数時間で最大流量を求めることができる．
- $O(n)$  時間の前処理で， $O(n)$  スペースの索引を構成し， $O(\alpha(n))$  時間で最大流量を求めることができる．

きる。

### 3 第 I 部のアルゴリズム概要と主結果

本節では与えられたグラフが二連結である場合の最大流索引付け問題に対するアルゴリズムの概略とその計算量について述べる。索引の構成に際し、まず二分 SPQR 木を構成する。二分 SPQR 木は、S 節点、P 節点、Q 節点、R 節点からなる木であり、各節点に対応するグラフであるスケルトン (skeleton) が存在し、Q 節点は根と葉に存在するという点で SPQR 木と同様だが、S 節点と P 節点は必ず二つの子を持つ。二分 SPQR 木は木分解  $(T, \{X_i\})$  と見なすことができ、特に  $(i, j) \in E(T)$  ならば  $|X_i \cap X_j| = 2$  が成り立つという特徴を持つ。

構成する索引は、以下の要素からなる：

- $D_1 = \{I_{ij} \mid (i, j) \in E(T)\}$ ,
- $D_2 = \{I_{ijk} \mid i \in N(R), (i, j), (i, k) \in E(T)\}$ .

ただし、 $I_{ij}$  は  $G_i$  の  $X_i \cap X_j$  を端子集合とする模倣ネットワークである ( $G_i$  は前節と同様に定める)。また、R 節点全体の集合を  $N(R)$  で表し、枝  $(i, j)$  と枝  $(i, k)$  により分割される部分木のうち、節点  $i$  を含む部分木に対応する部分グラフの、 $(X_i \cap X_j) \cup (X_i \cap X_k)$  を端子集合とする模倣ネットワークを  $I_{ijk}$  で表す。

木上積問合わせに対する前処理や最大流量の計算を前節のアルゴリズムと同様に行うことで、以下の結果を得る。

**定理 2.**  $r$  を R 節点に対応するスケルトンの枝数の最大値とすると、以下が成り立つ。

- (i)  $O(m + n\lambda(k, n) + nr^3)$  時間の前処理で、 $O(m + n\lambda(k, n) + nr^2)$  スペースの索引を構成し、定数時間で最大流量を求めることができる。
- (ii)  $O(m + nr^3)$  時間の前処理で、 $O(m + nr^2)$  スペースの索引を構成し、 $O(\alpha(n))$  時間で最大流量を求めることができる。

最大流量の計算において SPQR 木と  $D_1$  を用いると、以下の結果を得る。

**定理 3.**  $O(m + nr)$  時間で二頂点間の最大流量が計算できる。

### 4 第 II 部の主結果

本節では、一般化メークスパン最小化問題に対する本稿の結果をまとめる。

**定理 4.** 枝重みが 2 以下の完全二部グラフに対して、一般化メークスパンが 3 以下の枝被覆の存在判定は強 NP 完全である。特に、一般化メークスパン最小化問題は強 NP 困難である。

**系 1.**  $P \neq NP$  のもと、一般化メークスパン最小化問題に対する近似比  $3/2$  未満の多項式時間近似アルゴリズムは存在しない。

**系 2.** 枝重みが二通りの完全二部グラフ、および枝重みが三通りの完全グラフに対して、一般化メークスパン最小化問題は NP 困難である。

**定理 5.** 枝重みが三通りの完全グラフ、および (任意の枝重みの) 木に対して、一般化メークスパン最小化問題は多項式時間で解ける。

**定理 6.** 一般化メークスパン最小化問題に対する多項式時間  $\Delta(G)$  近似アルゴリズムが存在する。ここで、 $\Delta(G)$  はグラフの次数を表す。

### 5 まとめと今後の課題

第 I 部で最大流索引付け問題などの問題に対するグラフ分解を用いた解法を提案し、第 II 部で一般化メークスパン最小化問題の計算量について解析した。三連結グラフや平面グラフに対する最大流索引付け問題の高速化や、一般化メークスパン最小化問題に対するより良い近似比のアルゴリズムの構築は今後の課題である。

### 参考文献

- [1] N. Alon and B. Schieber: Optimal preprocessing for answering on-line product queries. *Technical Report*, Tel-Aviv University, 1987.
- [2] S. R. Arikati, S. Chaudhuri and C. D. Zaroliagis: All-pairs min-cut in sparse networks. *Journal of Algorithms*, vol. 29 (1998), pp.82–110.
- [3] B. Chazelle: Computing on a free tree via complexity-preserving mappings. *Algorithmica*, vol. 2 (1987), pp. 337–361.
- [4] T. Hagerup, J. Katajainen, N. Nishimura and P. Rade: Characterizations of  $k$ -terminal flow networks and computing network flows in partial  $k$ -trees. In *Proceedings of the Sixth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1995), pp. 641–649.