修士論文 要旨

ケーブルの緩みを考慮したテンセグリティ構造の動的解析法

数理情報学専攻 96221　**丹波 俊明**

指導教員　**寒野 善博 准教授**

1　はじめに

構造物に外力が作用せず，かつ非零の内部応力が存在し，静的な釣合状態を満たす条件を自己釣合条件という．圧縮力のみを負担するストラットと張力のみを負担するケーブルの 2 種類の部材が節点でピン接合された構造物が自己釣合条件を満たし，かつ各節点に対し接続するストラットが高々 1 本であるとき，テンセグリティと呼ぶ [1].

本研究では, テンセグリティの運動中にケーブルが緩んだり張ったりすることで生じる衝撃力を考慮したテンセグリティの動的解析手法を提案する．また運動中に生じる部材どうしの接触を検出する手法を提案する．さらに，提案したそれぞれの手法に関する数値実験を行い，テンセグリティの動的な挙動の特徴を探る．

2　Measure differential inclusion

常微分方程式の集合で記述される次の力学系を考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \quad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{x}$ は，状態ベクトルである．また，$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$ はベクトル場と呼ばれ，状態ベクトルの時間微分を記述する．$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ を線形有界であると仮定する．支配法則がある条件を境に切り替わるような力学系においては，(1) の $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が不連続になる．そのような場合にも対応するため (1) を拡張したのが, differential inclusion

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(t, \boldsymbol{x}(t)) \tag{2}$$

である．ここで $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ は，集合値写像である．不連続な $\boldsymbol{x}(t)$ を考えるために，(2) で $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ を用いる代わりに differential measure を用いて

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(t, \boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t \tag{3}$$

を考える．時間に関する不連続性を考慮した有界変動時間発展を記述するために，differential measure $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ は，atomic な項をもつ．したがって (3) を次のように拡張する．

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(t, \boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t, \boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}\eta. \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t, \boldsymbol{x}(t))$ は，$\boldsymbol{x}^+$ と $\boldsymbol{x}^-$ に依存する写像である．また，$\mathrm{d}\eta = \sum_i \mathrm{d}\delta_{t_i}$ である．

(4) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ は，有界変動関数であり，すべてのコンパクトな区間 $I = [t_0, t]$ に対して

$$\boldsymbol{x}^+(t) = \boldsymbol{x}^-(t_0) + \int_I \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}\eta$$

と書ける．ただし $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ は,

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{G}}(t, \boldsymbol{x})$$

を満たす．

3　運動の支配式

テンセグリティの運動の中で，ケーブルが緩んだ状態から張力をもつ状態に変化することがあり得る．その際，ケーブルの運動の慣性力に対する力として衝撃力が存在することが予想される．この衝撃力を考えるために，ケーブルの変化を物体が壁に完全非弾性衝突するモデルで置き換えることを考える（図 1)．壁につながれたバネは，ケーブルの弾性に対応している．また，壁ははじめケーブルの自然長の位置に置かれているものとしている．ケーブルが緩んだ状態から張力をもつ状態に変化する際の慣性力に対する力は，モデルでは，物体が壁と衝突する際に生じる衝撃力に置き換えられて考えることができる．ケーブルが緩んだ状態から自然長に変わることを，モデルでの物体と壁が接触する現象に対応して，接触と呼ぶことにする．

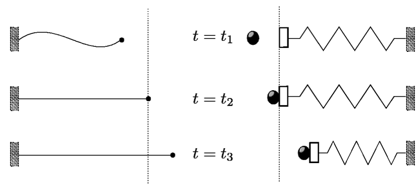

図 1. 接触のモデル

ケーブルの伸び e_c を $e_\mathrm{c} = e_\mathrm{c}^\mathrm{e} + e_\mathrm{c}^\mathrm{s}$ $\quad (e_\mathrm{c}^\mathrm{e} \geq 0,\ e_\mathrm{c}^\mathrm{s} \leq 0)$ と表すことにする．伸びの時間微分 $v_\mathrm{c} = \dot{e_\mathrm{c}}$ $\quad (v_\mathrm{c}^\mathrm{s} = \dot{e_\mathrm{c}^\mathrm{s}}, \quad v_\mathrm{c}^\mathrm{e} = \dot{e_\mathrm{c}^\mathrm{e}})$ と定義する．ある接触時刻 t^Im において，接触時にケーブルに生じる衝撃力 τ^Im と $v_\mathrm{c}^{\mathrm{s}+}(t^\mathrm{Im})$ の間には次のような相補性条件が成り立つ．

$$\tau^\mathrm{Im} \geq 0, \quad -v_\mathrm{c}^{\mathrm{s}+} \geq 0, \quad \tau^\mathrm{Im} v_\mathrm{c}^{\mathrm{s}+} = 0. \tag{5}$$

3.1　ケーブルの接触がない場合

ケーブルの接触がない場合には，構造系の運動方程式が

$$M(\boldsymbol{u})\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + K_\mathrm{s}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}(t) + B_\mathrm{c}^\top(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

と書ける．ただし，$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は正定値対称な質量行列，$K_\mathrm{s} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は構造系のストラットである全ての部材に対する剛性行列，$\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$ は外力をそれぞれ表す．運動の支配式は，これにケーブルの構成則，ケーブルの伸びと構造系全体の変位の関係を加えて，

$$\begin{aligned}
&M(\boldsymbol{u})\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + K_\mathrm{s}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}(t) + B_\mathrm{c}^\top(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0} \\
&\boldsymbol{b}_i^\top \boldsymbol{u} = e_{\mathrm{c}i} = e_{\mathrm{c}i}^\mathrm{s} + e_{\mathrm{c}i}^\mathrm{e} \quad (e_{\mathrm{c}i}^\mathrm{s} \leq 0,\ e_{\mathrm{c}i}^\mathrm{e} \geq 0) \quad (\forall i \in I_\mathrm{c}) \\
&\tau_i = k_{\mathrm{c}i} e_{\mathrm{c}i}^\mathrm{e} \quad (\forall i \in I_\mathrm{c})
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．I_c はケーブルである部材の添字の集合を表す．

3.2 ケーブルの接触が起こる場合

時刻 t に接触がある場合は，慣性力に対する力としてケーブルの張力 τ^{Im} が瞬間的に存在する．この力を考慮すると運動方程式は以下のようになる．

$$M(\boldsymbol{u})\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + K_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}(t) + B_{\mathrm{c}}^{\top}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(t) + \sum_{i \in I_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Im}}(t)} \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}(\boldsymbol{u})\tau_i^{\mathrm{Im}} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

運動の支配式は，

$$\begin{cases} M(\boldsymbol{u})\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + K_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}(t) + B_{\mathrm{c}}^{\top}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(t) \\ \quad + \sum_{i \in I_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Im}}(t)} \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}(\boldsymbol{u})\tau_i^{\mathrm{Im}} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}_i^{\top}\boldsymbol{u} = e_{\mathrm{c}i} = e_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{s}} + e_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{e}} \quad (e_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{s}} \leq 0,\ e_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{e}} \geq 0) \quad (\forall i \in I_{\mathrm{c}}) \\ \tau_i = k_{\mathrm{c}i}e_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{e}} \quad (\forall i \in I_{\mathrm{c}}) \\ \tau_j^{\mathrm{Im}} \geq 0, \quad -v_{\mathrm{c}j}^{\mathrm{s}\,+} \geq 0, \quad \tau_j^{\mathrm{Im}}v_{\mathrm{c}j}^{\mathrm{s}\,+} = 0 \quad (\forall j \in I_{\mathrm{c}}^{\mathrm{Im}}(t)) \end{cases} \tag{9a}$$

となる．

4 解析手法

4.1 手法 1：ケーブルの剛性が無限大の場合

ケーブルの剛性が無限大と仮定する（ストラットの剛性は有限）．それぞれのケーブルの伸びは，

$$e_{\mathrm{c}i} \leq 0 \quad (\forall i \in I_{\mathrm{c}})$$

となる．またケーブルの構成則 $\tau_i = k_{\mathrm{c}i}e_{\mathrm{c}i}$ から τ_i は定まらなくなってしまう．ケーブル i の伸び $e_{\mathrm{c}i}$ と張力 τ_i の間には，次の相補性条件がなりたつ．

$$\tau_i \geq 0, \quad -e_{\mathrm{c}i} \geq 0, \quad e_{\mathrm{c}i}\tau_i = 0. \tag{10}$$

続いて，この相補性条件を速度に関する条件に置き換えることを考えていく．初期時刻 $t=0$ において (10) を満たすと仮定する．このとき，時刻 $\forall t \in \{t \mid e_{\mathrm{c}i}(t) = 0\}$ において，

$$\tau_i(t) \geq 0, \quad -v_{\mathrm{c}i}^{+}(t) \geq 0, \quad \tau_i(t)v_{\mathrm{c}i}^{+}(t) = 0, \tag{11}$$

という相補性条件が成り立てば (10) が常に成り立つ．

節点変位 $\boldsymbol{u}$ の速度 $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}}$ とし，速度 $\boldsymbol{v}$ に関する測度を $\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t + (\boldsymbol{v}^{+} - \boldsymbol{v}^{-})\mathrm{d}\eta$ とおく．張力に関する測度を $\mathrm{d}\tau_i = \tau_i\mathrm{d}t + \tau_i^{\mathrm{Im}}\mathrm{d}\eta$ とおく．このとき，(5) および (11) より

$$\mathrm{d}\tau_i \geq 0, \quad -v_{\mathrm{c}i}^{+} \geq 0, \quad \mathrm{d}\tau_i v_{\mathrm{c}i}^{+} = 0 \qquad (i \in I = \{\forall i \in I_{\mathrm{c}} \mid e_i(t) = 0\}) \tag{12}$$

が成り立つ．(6) および (8) より，測度に関する運動方程式は

$$M(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{v} + K_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\mathrm{d}t + \sum_{i \in I_{\mathrm{c}}} \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\tau_i = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

となる．(12), (13) が measure differential inclusion となる．

4.1.1 問題の変形

(12), (13) を time-steping algorithm を用いて数値計算によって解いていくことを考える．

時間間隔 $[t^{\mathrm{i}}, t^{\mathrm{f}}]$ $(t^{\mathrm{f}} - t^{\mathrm{i}} = \Delta t)$ を考える．初期時刻 t^{i} における $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は既知であるとし，それぞれ $\boldsymbol{u}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{v}^{\mathrm{i}}$ とおく．中点法に基づき，時刻 $t^{\mathrm{m}} := t^{\mathrm{i}} + \frac{\Delta t}{2}$ における変位を

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{i}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{i}}\frac{\Delta t}{2} \tag{14}$$

で近似し，(13) の各項を次のように積分する．

$$\begin{aligned} \int_{t^{\mathrm{i}}}^{t^{\mathrm{f}}} M\mathrm{d}\boldsymbol{v} \quad &\rightarrow \quad M^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{i}}), && M^{\mathrm{m}} := M(\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}) \\ \int_{t^{\mathrm{i}}}^{t^{\mathrm{f}}} K_{\mathrm{s}}\boldsymbol{u}\mathrm{d}t \quad &\rightarrow \quad K_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}\Delta t, && K_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}} := K_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}) \\ \int_{t^{\mathrm{i}}}^{t^{\mathrm{f}}} \sum_{i \in I_c} \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}\mathrm{d}\tau_i \quad &\rightarrow \quad \sum_{i \in I_c} \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{m}}\hat{\tau}_i, && \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{m}} := \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}) \end{aligned}$$

これら用いて measure differential inclusion (12), (13) は，次のような線形相補性問題に書き直せる．

$$\begin{cases} M^{\mathrm{m}}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{i}}) + K_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}\Delta t + \sum_{i \in I_c} \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{m}}\hat{\boldsymbol{\tau}}_i = \boldsymbol{0} \\ (v_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{f}} =)\ \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{m}\top}\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} \leq 0 \\ \hat{\tau}_i \geq 0 \\ \hat{\tau}_i(\boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{m}\top}\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}}) = 0 \quad (i \in I = \{\forall i \mid e_{\mathrm{c}i}(t) = \boldsymbol{0}\}). \end{cases} \tag{15a}$$

ただし，ここで $\hat{\tau}_i = \int_{t^{\mathrm{i}}}^{t^{\mathrm{f}}} \mathrm{d}\tau_i$ としている．この線形相補性問題 (15) は次の 2 次計画問題の KKT 条件である．

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}\top}M^{\mathrm{m}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} + (-M^{\mathrm{m}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{i}} + K_{\mathrm{s}}^{\mathrm{m}}\boldsymbol{u}^{\mathrm{m}}\Delta t)^{\top}\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} \\ \mathrm{s.t.} \quad & \boldsymbol{b}_{\mathrm{c}i}^{\mathrm{m}\top}\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}} \leq 0 \end{aligned}$$

この 2 次計画問題を解くことで $\boldsymbol{v}^{-}$ から $\boldsymbol{v}^{+}$ を求めることができる．

4.2 手法 2:ケーブルの重量が無視できる場合

3.2 節では，ケーブルが緩んだ状態から張力をもつ状態への変化を物体が壁に完全非弾性衝突するモデルで置き換えた（図 1）．ここで，ストラット（球）の重量を m_{s}，ケーブル（ばねの板）の重量を m_{c}，衝突直前のモデル化した球の速度を v^{-}，衝突後の球と板の速度を v^{+} とする（完全非弾性衝突なので両者の速度は一致する）．このとき衝突時の運動量保存則は，

$$m_{\mathrm{s}}v^{-} = m_{\mathrm{c}}v^{+} + m_{\mathrm{s}}v^{+} \tag{16}$$

となる．ケーブルの重量がストラットの重量に対してとても小さい場合を考える．このとき，重さ m_{c} はゼロとみなすことができ，(16) より

$$v^{-} = v^{+}$$

となる．よって衝突時に速度が変化しないので，衝撃力の影響を受けていないと考えることができる．このとき，

$$\tau^{\mathrm{Im}} = 0$$

となる．よって接触が起こる場合も運動方程式は接触なしの場合と同じになり，支配式は (7) となる．$\boldsymbol{v}^{\mathrm{i}}$ から $\boldsymbol{v}^{\mathrm{f}}$ を求めるには，線形方程式を解けばよい．

参考文献

[1] R. Motro. *Tensegrity.* Kogan Page Science, London, 2003.