

ネットワークデザインゲームにおけるポテンシャル最小化

数理情報学専攻 48096211 河瀬 康志

指導教員 増田 直紀 准教授

1 はじめに

ゲーム理論は、複数人のプレイヤーがあるルールの下でどのように振る舞い、相互関係するかについての理論である。ゲーム理論の1つの枠組みとして、非協力ゲームと呼ばれる、どのプレイヤーも協力をしない状況を扱うものがある。非協力ゲームにおいては、どのプレイヤーも戦略を変えようとし「均衡」の性質について様々な研究がなされている。

近年、ゲーム理論をアルゴリズム論的に扱うアルゴリズム論的ゲーム理論が注目を集めている。この分野における課題の1つは、均衡を見つけるアルゴリズムの設計及び計算量の解析である。また、プレイヤーが利己的に動くことで社会的コスト（全プレイヤーのコスト和）がどの程度悪くなるかという非効率さの解析も課題の1つであり、本研究では主にこれについて扱った。非効率さを定量的に扱う指標はいくつかある。例えば、Koutsoupias と Papadimitriou [5] は Nash 均衡における社会的最悪コストと社会的最適コストとの比である Price of Anarchy と呼ばれる指標を提案している。また、Anshelevich ら [1] は Nash 均衡における社会的最適コストと社会的最適コストとの比である Price of Stability と呼ばれる指標を提案している。

本研究では Anshelevich ら [1] によって提案されたネットワークデザインゲームと呼ばれる問題を扱った。この問題では、グラフと各プレイヤーがつながべき始点と終点が与えられる。各枝には非負のコストが定まっており、利用したプレイヤーで当分配する。各プレイヤーの目的は、自分のコストをなるべく小さくするようなパスを選ぶことである。

このネットワークデザインゲームは、ポテンシャル関数と呼ばれる関数が定義できるポテンシャルゲームに属し、Nash 均衡は、このポテンシャル関数の値が極小となることで特徴付けることができる。特にポテンシャル関数の値が最小となる状態は、安定な Nash 均衡となることが知られている [2, 7]。そこで、本研究ではポテンシャル最小の状態におけるコストと社会的に最適なコストとの比による指標について考え、Potential-Optimal Price of Anarchy (POPoA) 及び、Potential-Optimal Price of Stability (POPoS) を定義した。Potential-

Optimal Price of Anarchy は、Asadpour らによる論文 [2] では Inefficiency Ratio of Stable Equilibria と呼ばれているものであり、Potential-Optimal Price of Stability は本論文で新たに提案した指標である。

先行研究及び本研究による、各非効率さの指標評価の上下界は表 1, 2 である

2 先行研究

Anshelevich ら [1] は、 n 人によるネットワークデザインゲームの Price of Anarchy について上界と下界が n になるというタイトな結果を示した。また、ポテンシャル関数を用いることで Price of Stability の上界が調和級数 $H(n)$ になることを示し、有向ネットワークデザインゲームでは下界も $H(n)$ になるというタイトな結果を示した。しかし、無向グラフでの下界についてはあまり知られておらず、 $n = 2$ の場合は $H(2) = 3/2$ となることのみ与えられている。

Li [6] は全てのプレイヤーの終点が等しい無向ネットワークデザインゲーム（無向マルチキャストゲーム）について、Price of Stability の上界が $O(\log n / \log \log n)$ となることを示した。

Fiat ら [4] は、全てのプレイヤーの終点が等しく、各点を始点とするプレイヤーが 1 人以上いる無向ネットワークデザインゲーム（無向ブロードキャストゲーム）について、Price of Stability の上界が $O(\log \log n)$ となることを示した。

Bilò ら [3] は、Price of Stability の下界について無向ブロードキャストゲームの場合 $20/11 \approx 1.818$ 、無向マルチキャストゲームの場合 1.862、一般のネットワークデザインゲームの場合 $348/155 \approx 2.245$ と改善した。

3 本研究の成果

まず、Anshelevich ら [1] による有向マルチキャストゲームに対してコストの小さい Nash 均衡を見つけることの NP 困難性の証明を変形し、無向マルチキャストゲームに対してコストの小さい Nash 均衡を見つけることも NP 困難となることを証明した。

また、無向マルチキャストゲームについて人数や頂点数を固定した場合、POPoA と POPoS の値は等しくなることを示した。

ネットワークデザインゲームにおいてネットワークが三角不等式を満たすのは自然であると考え、無向メトリックマルチキャストゲームを導入した。無向マルチキャストゲームにおける POPoA の値は、対応する無向メトリックマルチキャストゲームにおける POPoA の値に等しくなることを示した。また、 n 人による無向メトリックマルチキャストゲームに対する PoS の上界は、 n 人による無向ブロードキャストゲームに対する PoS の 2 倍で抑えられることを示した。 n 人による無向ブロードキャストゲームに対する PoS の上界は、Fiat ら [4] によって $O(\log \log n)$ となることが示されているので、これにより、 n 人による無向メトリックマルチキャストゲームに対する PoS の上界として $O(\log \log n)$ を得た。加えて、PoA の下界について、無向メトリックネットワークの場合でも下界が n となり上界に一致することを示した。

最後に主定理として、無向ブロードキャストゲームについて、プレイヤーの人数を n に固定したとき、POPoA の上界が $O(\sqrt{\log n})$ 、下界が $\Omega(\sqrt{\log \log n})$ となることを示した。また、グラフの頂点数 $|V|$ を固定したとき、POPoA の上下界は $\Theta(\log |V|)$ となることを示した。

4 今後の課題

今後の課題としては、まず、ネットワークデザインゲームに対する POPoA, POPoS のより精緻な評価が挙げられる。ブロードキャストゲームの頂点数を固定した場合についてはタイトな評価を得たが、その他の場合についてはまだギャップがある。そこで、このギャップを小さくすることが今後の課題の 1 つである。また、無向マルチキャストゲームや一般のネットワークデザインゲームについて、さらに大きなギャップがあるため、このギャップを小さくすることも課題である。

また、POPoA, POPoS は一般のポテンシャルゲーム（混雑ゲーム）について定義できる指標であるので、ネットワークデザインゲーム以外のゲームでのこの指標に対する調査が課題として挙げられる。Asadpour と Saberi [2] はロードバランスゲームと、各施設に対するコストが高々 p 次の多項式である混雑ゲームについて、POPoA の解析を行なっている。しかし、POPoS については考えられていないので、それぞれのゲームに対する POPoS の解析もまた課題である。

表 1. n 人でのネットワークデザインゲームにおける効率の上下界

		PoS	POPoS, POPoA	PoA
無向 ブロードキャスト	上界	$O(\log \log n)$ [4]	$O(\sqrt{\log n})$	n [1]
	下界	1.818 [3]	$\Omega(\sqrt{\log \log n})$	n [1]
無向メトリック マルチキャスト	上界	$O(\log \log n)$	$O(\frac{\log n}{\log \log n})$ [6]	n [1]
	下界	1.862 [3]	$\Omega(\sqrt{\log \log n})$	n
無向 マルチキャスト	上界	$O(\frac{\log n}{\log \log n})$ [6]	$O(\frac{\log n}{\log \log n})$ [6]	n [1]
	下界	1.862 [3]	$\Omega(\sqrt{\log \log n})$	n [1]
無向一般	上界	$H(n)$ [1]	$H(n)$ [1]	n [1]
	下界	2.245 [3]	$\Omega(\sqrt{\log \log n})$	n [1]
有向一般	上界	$H(n)$ [1]	$H(n)$ [1]	n [1]
	下界	$H(n)$ [1]	$H(n)$ [1]	n [1]

表 2. $|V|$ 点でのネットワークデザインゲームにおける効率の上下界

		PoS	POPoS, POPoA	PoA
無向 ブロードキャスト	上界	$O(\log V)$	$O(\log V)$	∞ [1]
	下界	1.818 [3]	$\Omega(\log V)$	∞ [1]

参考文献

- [1] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon M. Kleinberg, Éva Tardos, Tom Wexler, and Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing*, Vol. 38, No. 4, 1602–1623, 2008.
- [2] Arash Asadpour and Amin Saberi. On the inefficiency ratio of stable equilibria in congestion games. In *Proceedings of the 5th Workshop on Internet and Network Economics*, 545–552. Springer, 2009.
- [3] Vittorio Bilò, Ioannis Caragiannis, Angelo Fanelli, and Gianpiero Monaco. Improved lower bounds on the price of stability of undirected network design games. In *Proceedings of the 3rd International Symposium on Algorithmic Game Theory*, 90–101, 2010.
- [4] Amos Fiat, Haim Kaplan, Meital Levy, Svetlana Olonetsky, and Ronen Shabo. On the price of stability for designing undirected networks with fair cost allocations. In *Proceedings of the 33rd Annual International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, 608–618, 2006.
- [5] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, 404–413, 1999.
- [6] Jian Li. An $O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$ upper bound on the price of stability for undirected Shapley network design games. *Information Processing Letters*, Vol. 109, No. 15, 876–878, 2009.
- [7] Takashi Ui. Robust equilibria of potential games. *Econometrica*, Vol. 69, No. 5, 1373–1380, 2001.