修士論文 要旨

Ganelius 標本点を用いた関数近似公式とその応用

数理情報学専攻 48096204　鵜島 崇
指導教員　杉原 正顯 教授

1　はじめに

本論文では，複素平面の単位円盤における関数空間 H_p^* に対する関数近似公式について調べた．この空間 H_p^* は単位円周上に代数的特異点を持っている関数を含んでいる．

H_p^* に対する関数近似公式として著名な方法に Sinc 関数近似がある．Sinc 法に関する研究は古くから行われ，現在でも様々な場面への応用が考えられている．一方で，H_p^* に対する関数近似の誤差の下限を理論的に求めることを目標とする研究も行われてきており，Wilderotter [3] らによって求められてきた．しかし，陽に関数近似公式を与えるものではなかった．

その中で，不定積分公式においてであるが，Jang and Haber [2] により，SE-Sinc タイプの公式の精度を上回る近似公式が陽に与えられた．この不定積分公式は，先述の関数近似の誤差の下限を求める研究において用いられた Ganelius による定理 [1] を利用し，この定理の中で登場する数列を改良した数列 (これを本論文では Ganelius 標本点と呼ぶことにする) を標本点にして作られた公式である．

本論文では，Jang and Haber [2] による不定積分公式を参考にして，H_p^* に対する Ganelius 標本点を用いた関数近似公式を提案した．そしてこの公式が SE-Sinc 法の精度を上回り，更に H_p^* に対する関数近似公式として準最適性を達成することを示した．また，応用への第一歩として，常微分方程式の 2 点境界値問題に応用することを考え，SE-Sinc 選点法の精度を上回ることを示した．

2　Ganelius 標本点を用いた関数近似公式

2.1　不定積分公式 (先行研究)

複素平面の単位開円盤 U におけるハーディ空間 H^p とは，$p>1$ に対して

$$\|f\|_p = \begin{cases} \displaystyle\sup_{0\leqq r<1}\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^p \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}} & (1<p<\infty), \\ \displaystyle\sup_{0\leqq r<1}\max_{0\leqq\theta\leqq 2\pi}\left|f\left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)\right| & (p=\infty) \end{cases}$$

が有界であるような関数 f の空間である．

Jang and Haber [2] により得られた不定積分公式は，以下の近似公式である．

定理 2.1 (Ganelius 標本点を用いた不定積分公式)
$f\in H^p$ $(p>1)$ と $q=\dfrac{p}{p-1}$ に対し，数列 $\{a_k\}$ が Ganelius 標本点のとき，

$$\sup_{\|f\|_p\leqq 1}\ \sup_{-1\leqq t\leqq 1}\left|\int_{-1}^{t} f(x)\mathrm{d}x - {\sum_{k=-n}^{n}}' f(b_k)\cdot\left[\rho_k {\sum_{m=-n}^{n}}' \frac{\rho_m}{b_m(1-b_k b_m)}\cdot\log\frac{1+b_m}{1-b_m t}\right]\right| \leqq Cn^{\frac{1}{2q}}\exp\left(-\pi\sqrt{\frac{n}{q}}\right) \qquad (1)$$

が成り立つ．ただし，定数 C は q のみに依る．　■

この公式は，$-1<x<1$ における積分

$$I(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{1}{B_n(z)}\cdot\frac{f(z)}{z-x}\mathrm{d}z \qquad (2)$$

を留数定理により計算して得られた

$$f(x)={\sum_{k=-n}^{n}}'\rho_k\cdot\frac{B_n(x)}{x-b_k}\cdot f(b_k)+B_n(x)I(x) \qquad (3)$$

の両辺を x について -1 から t $(-1\leqq t\leqq 1)$ まで積分して作られている．ただし，$B_n(z)$ とは $B_n(z)={\prod_{k=-n}^{n}}'\dfrac{z-b_k}{1-b_k z}$ であり (本論文では，積や和の $'$ は $k=0$ を除くことを表す)，$\rho_k={\prod_{l=-n}^{n}}'(1-b_l b_k)\Big/{\prod_{\substack{l=-n\\ l\neq k}}^{n}}'(b_k-b_l)$ としている．数列 $\{b_k\}$ とは $b_k=\sqrt{\dfrac{1-a_k}{1+a_k}}, b_{-k}=-b_k$ のように，数列 $\{a_k\}$ $(k=1,2,\cdots,n$ に対し $0<a_k<1$ を満たす) から決まる数列である．近似公式の誤差が定理 2.1 のようになるためには，$\{a_k\}$ の取り方を以下の Ganelius 標本点 $\left(r \text{ は } r=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2n}}}{q}\right)$ にする．

定義 2.1 (Ganelius 標本点)
r は $0<r<1$ の定数とする．このとき

- $n_o = n-\left\lceil\dfrac{\pi}{4}\sqrt{nr}\right\rceil$,
- $\varphi(x)=\exp\left(\pi\sqrt{\dfrac{x}{r}}\right)$,

- $a_k = \begin{cases} \dfrac{\varphi(k-1)}{\varphi(n_o)}, & k = 1, 2, 3, \cdots, n_o, \\ \dfrac{\varphi(k-3/2)}{\varphi(n_o)}, & k = n_o + 1, \\ 1 - \dfrac{k - n_o - 1}{5(n - n_o - 1)}, & n_o + 2 \leqq k \leqq n \end{cases}$

と定めた $\{a_k\}$ を Ganelius 標本点と定義する． ■

2.2 関数近似公式 (本研究)

先述の不定積分公式の導出における式 (3) までは，同じ途中過程を辿る．式 (3) も関数近似公式とみなすことができるが，このままでは誤差の部分 $B_n(x)I(x)$ の絶対値は，端点 $x = \pm 1$ で発散してしまったりする．

そこで，Wilderotter [3] らに倣い，H^p から派生した空間

$$H_p^* = \left\{ g : U \to \mathbb{C} \;\middle|\; g \text{ は } U \text{ で正則かつ } f(z) = \frac{g(z)}{1 - z^2} \in H^p \text{を満たす} \right\}$$

を考え (ノルムは $\|g\|_p^* = \|f\|_p$)，この空間に対する関数近似を考える．そのためには，式 (3) の両辺に，$1 - x^2$ をかけることを考える．そして $f(x) \cdot (1 - x^2) = g(x)$ とおき，数列 $\{a_k\}$ を Ganelius 標本点とすれば，以下の定理が成り立つ．

定理 2.2 (Ganelius 標本点を用いた関数近似公式) $g \in H_p^*$ $(p > 1)$ と $q = \dfrac{p}{p-1}$ に対し，数列 $\{a_k\}$ が Ganelius 標本点のとき，

$$\sup_{\|g\|_p^* \leq 1} \sup_{-1 \leqq x \leqq 1} \left| g(x) - \sum_{k=-n}^{n}{}' g(b_k) \cdot \rho_k \cdot \frac{B_n(x)}{x - b_k} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - {b_k}^2} \right| \leqq C \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n}{q}}\right) \tag{4}$$

が成り立つ．ただし, 定数 C は q には依るが n には依らない． ■

一方，関数空間 H_p^* に対する関数近似の誤差の下限が研究されてきており，

$$(H_p^* \text{に対する SE-Sinc 関数近似の誤差}) \leqq C_1 \sqrt{n} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n}{2q}}\right),$$

$$C_2 n^{-\frac{1}{2p}} \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n}{q}}\right) \leqq (H_p^* \text{に対する関数近似の誤差の下限}) \leqq C_2' \exp\left(-\pi \sqrt{\frac{n}{q}}\right)$$

という不等式が Wilderotter [3] により示されている．ただし，C_1，C_2，C_2' は定数である．したがって，定理 2.2 は，SE-Sinc 法よりも高精度であることが分かり，関数近似の誤差の下限を達成しているかは分からないものの，exp の中が一致しているという意味で”準最適性”を達成していると言える．

3 常微分方程式への応用

Ganelius 標本点を用いた関数近似公式を二階常微分方程式の 2 点境界値問題に応用することを考える．この近似解法の 1 つに，選点法が知られている．選点法の基底関数に Sinc 関数を用いた方法は Sinc 選点法と呼ばれている．本論文では，選点法の基底関数に定理 2.2 の基底関数を用いた場合を考え，SE-Sinc 選点法と数値実験で比較した．具体例として，

$$\begin{cases} y''(x) - \dfrac{1}{x^2} y(x) = \dfrac{1 - \log x}{x}, & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

を考える．真の解は $y(x) = x \log x$ である．実装言語は Mathematica7.0 で，60 桁精度で計算した．数値実験結果は図 1 である (縦軸は誤差，横軸は総標本点数，実線は選点法の誤差，破線は関数近似公式を真の解に直接用いた時の誤差)．数値実験結果は理論通りとなっている．

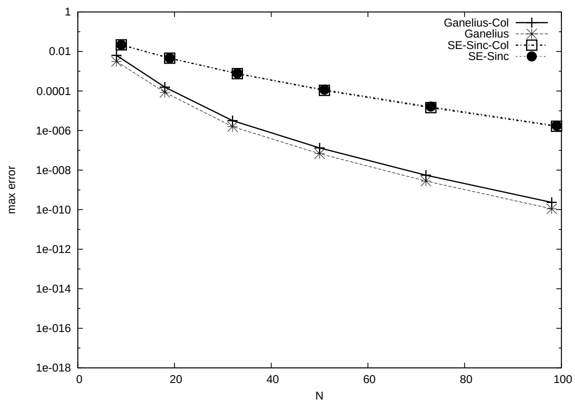

図 1. 微分方程式に対する選点法の誤差

参考文献

[1] T. H. Ganelius: Rational approximation in the complex plane and on the line. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica*, Vol. 2 (1976), pp. 129–145.
[2] A. P. Jang and S. Haber: Numerical indefinite integration of functions with singularities. *Mathematics and Computation*, Vol. 70 (2001), pp. 205–221.
[3] K. Wilderotter: n-widths of H^p-spaces in $L_q(-1, 1)$. *Journal of Complexity*, Vol. 8 (1992), pp. 324–335.