

不確かな目的関数をもつ最適化問題に対する近似アルゴリズム

数理情報学専攻 48096228 間野 暢

指導教員 牧野 和久 准教授

1 不確かな目的関数をもつ最適化問題

不確かさをもつ最適化問題を扱う枠組みは確率最適化 [6] とロバスト最適化 [3] に大きく分けられ、どちらの枠組みでも盛んに研究されている。本論文では $\min \{f(x) \mid x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n\}$ のように記述される最適化問題の目的関数 f が不確かである場合を扱う。特に目的関数が線形であるときは、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ とある重みベクトル $w \in \mathbb{R}^n$ が存在して $f(x) = w^\top x$ となる。このとき、この目的関数が不確かさをもつとは、重みベクトル w が不確かということである。ロバスト最適化の枠組みでは不確かなパラメータが属する集合を仮定する。そこで、不確かな目的関数 f が属する集合を \mathcal{F} 、特に線形の目的関数の場合は不確かな重みベクトル w が属する集合を W とそれぞれ書くことにする。

このような状況では実行可能解 $x \in \mathcal{X}$ を一つ決めても、目的関数 f が不確かなので目的関数値が一意に定まらない。そこで、多くの場合、基準を一つ定め、その最悪値を最小化しようとする。例えば、最悪の目的関数値を最小化しようとする最悪値最小化問題は $\min \{\max_{f \in \mathcal{F}} f(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$ となる。また、最適解との差、すなわち最善選択との差、機会損失を基準として、その最悪値を最小化する最悪機会損失最小化問題は $\min \{\max_{f \in \mathcal{F}} (f(x) - \min_{y \in \mathcal{X}} f(y)) \mid x \in \mathcal{X}\}$ となる。

不確かな線形の目的関数をもつ個々の最適化問題に対しては様々な研究がなされている [2, 5]。例えば、不確かな線形目的関数をもつ最短経路問題、最小全域木問題、割当問題、ナップサック問題に対してロバスト最適化の枠組みを適用し、その計算複雑度、近似可能性を考察するという研究がある [2]。

2 本論文のねらいと成果

本論文のねらいは不確かな目的関数をもつ最適化問題に対して2つの意味で包括的な近似アルゴリズムを考察することである。1番目はより一般の目的関数集合 W を扱うことである。2番目は個々の問題に対するアルゴリズムではなく、一般的な近似アルゴリズムを構成することである。そこで、既存の近似アルゴリズムに関する命題について述べる。

命題 1 (Kasperski and Zieliński [4]). $\mathcal{X} \subset \{0, 1\}^n$, $W = \prod_{i=1}^n [w_i, \bar{w}_i]$, $w_i \geq 0$ とする。このとき、 $\tilde{w} = (w + \bar{w})/2$ として、 \tilde{x} を $\min \{\tilde{w}^\top x \mid x \in \mathcal{X}\}$ の最適解とする。すると、 \tilde{x} は最悪機会損失最小化問題の2近似解である。

命題 2 (Aissi, Bazgan, and Vanderpooten [1]). $\mathcal{X} \subset \{0, 1\}^n$, $W = \{w_1, \dots, w_k\}$, $w_i \geq 0$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) とする。このとき、 $\tilde{w} = \sum_{i=1}^k w_i/k$ として、 \tilde{x} を $\min \{\tilde{w}^\top x \mid x \in \mathcal{X}\}$ の最適解とする。すると、 \tilde{x} は最悪値最小化問題の k 近似解である。また、 \tilde{x} は最悪機会損失最小化問題の k 近似解である。

命題 1, 2 は重みベクトル集合 W から代表点 \tilde{w} を選び、その重み \tilde{w} での最適化問題 $\min \{\tilde{w}^\top x \mid x \in \mathcal{X}\}$ の最適解が近似解になっている、と主張している。そして、どちらの場合も近似解の構成に必要なのは不確かさをもたない問題 $\min \{\tilde{w}^\top x \mid x \in \mathcal{X}\}$ に対する最適化アルゴリズムである。すなわち、近似解を構成するには、重みベクトル $w \in W$ を受け取り、そこでの最適化問題 $\min \{w^\top x \mid x \in \mathcal{X}\}$ の最適解を出力するオラクルがあれば十分であり、 \mathcal{X} を見る必要はない。そこで、次のような一般化された問題、 $\min\text{-max}(L)$ を考える。

定義 1 ($\min\text{-max}(L)$). 入力は $W \subseteq \mathbb{R}^n$ と最適化オラクル $\mathcal{O}_P : W \rightarrow \mathcal{X}$ 。目的は $\max_{w \in W} L(w, x)$ を最小化する $x \in \mathcal{X}$ を求めること。

ここで最適化オラクル \mathcal{O}_P は $w \in W$ を受け取り最適実行可能解 $\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} w^\top x$ を一つ返すオラクルである。また、 $L : W \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ は最適性の基準を表す汎関数である。例えば、 $L(w, x) = w^\top x$ が最悪値最小化問題に、 $L(f, x) = w^\top x - \min_{y \in \mathcal{X}} w^\top y$ が最悪機会損失最小化問題にそれぞれ対応する。さらに、 $\min\text{-max}(L)$ では \mathcal{X} から直接情報を得ることはできず、最適化オラクルを通じて間接的にのみ、 \mathcal{X} に関する情報を得られることに注意する。この $\min\text{-max}(L)$ 問題を考えた際に、命題 1, 2 のようなことが成立するかどうかを明らかにするのが本論文のねらいである。

本論文ではこの $\min\text{-max}(L)$ に関して、5つの定理を示した。まず、1番目として L が次の式 (1), (2) を満たすと仮定し、近似可能性に関する定理 1 を示した。

$$\forall w \in W, \forall x \in \mathcal{X}, L(w, x) \geq 0. \quad (1)$$

$$\forall w \in W, \forall x, y \in \mathcal{X}, L(w, x) - L(w, y) = w^\top x - w^\top y. \quad (2)$$

定理 1 (近似可能性と内分可能性). L を式 (1), (2) を満たす汎関数とする. そして, W は点 \tilde{w} で λ 内分可能であり, \tilde{x} は $\min_{x \in \mathcal{X}} \tilde{w}^\top x$ の最適解であるとする. すると, \tilde{x} は $\min\text{-max}(L)$ の $1 + \lambda$ 近似解である.

定義 2 (内分可能). $W \subseteq \mathbb{R}^n$ が点 $x \in \mathbb{R}^n$ で λ 内分可能であるとは

$$\forall v \in W, \exists u \in W, \mu \in [0, \lambda], w = \frac{v + \mu u}{1 + \mu} \quad (3)$$

が成立することとする.

ここで, λ 内分可能とは本論文で導入した概念である. 特に W が凸集合であるときには, 任意の $v \in W$ に対して, $w + (w - v)/\lambda$ が W に含まれることが必要十分である. 最悪値最小化問題, 最悪機会損失最小化問題の場合は汎関数 L が式 (1), (2) を満たすことが分かる. そして, この定理 1 と内分比の基本的性質から, 先の命題 1, 2 を導くことができる. 2 番目として, λ 内分可能であるような λ の下限を W の内分比 $\lambda(W)$ と定義し, 次元との関係を述べた次の定理を示した.

定理 2 (内分比と次元). W を有界閉で凸とする. このとき, $\lambda(W) \leq \dim(W)$.

この定理 2 から, 常にある $\tilde{w} \in W$ が存在して, W が \tilde{w} で $\dim(W)$ 内分可能であることが保証できる. これは, 定理 1 とあわせれば, うまく $\tilde{w} \in W$ を選ぶことができれば, 常に $1 + \dim(W)$ の近似解を得ることができることを示している. そして, 3 番目と 4 番目の定理は内分可能性の下限を達成する点, 内分比最小点に関する次の定理である.

定理 3 (内分比最小点: 凸包). $W \subset \mathbb{R}^n$, $W = \text{conv}(\{w_1, \dots, w_k\})$ とする. このとき, 内分比最小点はある線形計画を解くことで得られる.

定理 4 (内分比最小点: 線形不等式系). $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ として, $W = \{f \in \mathbb{R}^n \mid Af \leq b\}$ とする. このとき, 内分比最小点はある線形計画を解くことで得られる.

この定理 3, 4 より, W の凸包による表現または, 線形不等式系による表現が分かっている場合は内分比最

小点を多項式時間で求めることができる. したがって, 定理 1 より, 多項式時間で $1 + \lambda(W)$ 近似解を得ることができる. さらに, 定理 2 より, 近似解の近似精度を上から $1 + \dim(W)$ で抑えることができる. 5 番目の定理として, $\min\text{-max}(L)$ の近似限界が $1 + \lambda(W)$ であることを示す次の定理を示した.

定理 5 ($\min\text{-max}(L)$ の近似限界). $\min\text{-max}(L)$ において $1 + \lambda(W)$ よりも良い近似比をもつアルゴリズムは存在しない.

この定理 5 でのアルゴリズムとは, 多項式時間アルゴリズムのみでなく, 指数時間アルゴリズムなどを含む一般のアルゴリズムのことであるに注意する. この定理 5 は, 内分比による近似の評価が最善であると同時に最適化オラクルのみを使用した解法の限界を示すものでもある. つまり, より良い近似解を求める必要があるならば, オラクルのみを使用するのではなく, 問題の構造を利用しないといけない, 具体的には \mathcal{X} の性質や情報が必要である, ということである.

また, 本論文では目的関数が線形でない場合や, 最悪相対値や最悪相対機会損失の近似可能性, 最大化問題に関する近似可能性, 最適化オラクルではなく近似オラクルが与えられた場合についても考察している.

参考文献

- [1] H. AISSI, C. BAZGAN, AND D. VANDERPOOTEN, *Approximating min-max (regret) versions of some polynomial problems*, in Proceedings of the 12th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON 2006), vol. 4112 of Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, 2006, pp. 428–438.
- [2] ———, *Min-max and min-max regret versions of combinatorial optimization problems: A survey*, European Journal of Operational Research, 197 (2009), pp. 427–438.
- [3] A. BEN-TAL, L. E. GHAOUI, AND A. NEMIROVSKI, *Robust Optimization*, Princeton University Press, 2009.
- [4] A. KASPERSKI AND P. ZIELIŃSKI, *An approximation algorithm for interval data minmax regret combinatorial optimization problems*, Information Processing Letters, 97 (2006), pp. 177–180.
- [5] P. KOUVELIS AND G. YU, *Robust Discrete Optimization and Its Applications*, Non-Convex Optimization and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1st ed., November 1997.
- [6] A. SHAPIRO, D. DENTCHEVA, A. RUSZCZYŃSKI, AND A. RUSZCZYŃSKI, *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, September 2009.