修士論文 要旨

多項式計画問題とその緩和法に関する研究

数理情報学専攻 48096210　勝見佑平
指導教員　室田一雄 教授

1　多項式計画問題と半正定値計画緩和

多項式計画問題とは，多変数の実係数多項式 $g_1,\ldots,g_m \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ によって記述される制約条件を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ のうち，目的関数 $p \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ を最小にするような解 $\boldsymbol{x}^*$，及び最小値 p^* を求める問題である:

$$\begin{aligned} p^* = \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & p(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_1(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ldots,g_m(\boldsymbol{x}) \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $\boldsymbol{x}(=(x_1,\ldots,x_n))$ は n 個の変数であり, $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}] = \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ は実係数多項式の環である.

多項式計画問題は記述力が高く，例えば，複数の多項式の共通の実零点を求める問題や 0-1 線形計画問題が (1) の形で表現できる．このことから多項式計画問題は一般に変数の次元 n と制約条件の数 m の多項式に比例する時間で解くことは難しいと考えられている．この問題 (1) に対する統一的なアプローチとして，半正定値計画緩和によって近似する手法が Lasserre [2] によって確立され，以後，様々な利点が明らかになっている．

半正定値計画緩和（以下，SDP 緩和）とは，元の問題を近似するような半正定値計画問題（SemiDefinite Program，以下 SDP）を構成し，元の問題の近似的な解を得る手法である．$n \times n$ 対称行列の空間を $\mathcal{S}^n$ と書くことにする．行列 $A \in \mathcal{S}^n, C \in \mathcal{S}^n$, ベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，SDP は次のように定式化される:

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathcal{S}^n} \quad & C \bullet X \\ \text{s.t.} \quad & A_i \bullet X = b_i \quad (i=1,\ldots,m) \\ & X \succeq O. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，演算 $\bullet$ は 2 つの対称行列に関して $A \bullet B := \mathrm{Tr}(AB)$ と定義される．SDP には内点法と呼ばれる，任意の精度の解を n, m の多項式時間で計算するアルゴリズムが存在し，現在様々なソルバに実装されている．

2　研究内容

本研究では，Lasserre [2] によって示された SDP 緩和による手法が理論的に優れているものであることを保証する二つの定理

- $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ における「非負多項式の特徴を与える定理（Positivstellensatz）」
- その双対空間 $(\mathbb{R}[\boldsymbol{x}])^*$ における,「ある測度が存在して，積分の形で書けるような線形汎関数の特徴を与える定理」

に注目する．前者の定理は 1900 年に Hilbert によって提唱された非負多項式と SOS（Sums Of Squares）多項式の関係を問う Hilbert の第 17 番目の問題に端を発し，また後者の定理も 20 世紀初頭から研究が続くモーメント問題として知られる関数解析学の一分野が起源である．

本研究では多項式システムが空である証拠を解としてもつ SDP の実行可能性判定問題を与える定理として，Farkas の補題を始めとする一連の二者択一定理，非負多項式の特徴を与える定理，零点定理を整理する．また，それらの定理の最適化問題への応用として，多項式計画問題の最適値が入力の多項式サイズの SDP を解くことで得られる場合の例を示す．例えば，目的関数 f が 4 次の凸関数，4 次以下の凸関数 $g_1,\ldots,g_m$ から定まる m 個の制約条件 $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ $(i=1,\ldots,m)$ からなる凸 4 次計画問題は凸集合の分離定理から示される基本的な二者択一定理を用いて双対問題を構成し，多項式の非負

制約を緩和することで次の SDP 緩和問題が得られる:

$$\begin{aligned}\sup_{\rho\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^m} \quad & \rho \\ \text{s.t.} \quad & [f-\rho]_\alpha + \sum_{i=1}^{m} y_i g_\alpha = A \bullet B_\alpha \\ & \quad \forall\alpha : |\alpha| \le 2, \\ & A \succeq O, \\ & y_i \ge 0\ (i=1,\dots,m).\end{aligned}$$

ここで，B_α は各 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して定義される定数行列である．2 変数 $(n=2)$ の場合はスレーター条件の仮定の下，この SDP 緩和問題の最適値と元の問題の最適値は等しくなる．この問題のサイズは $\mathrm{O}(m+n^2)$ であり，n と m の多項式に比例する時間で最適値を計算することができる．元の問題の制約条件の最大次数が 4 のとき，Lasserre [2] の SDP 緩和の階層の一番簡単な問題に一致し，制約条件の最大次数が 2 以下のとき，その一番簡単な問題よりさらに簡単な緩和問題となっている．

一方，双対空間 $(\mathbb{R}[\boldsymbol{x}])^*$ に関する定理の研究として，モーメント行列の半正定値性に関する考察を行う．$(\mathbb{R}[\boldsymbol{x}])^*$ の各元は，対応する実数列 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+^n}$ と同一視することができる．この $\boldsymbol{y}$ に関して α 行 β 列の要素が $y_{\alpha+\beta}$ であるような可算無限のサイズの行列 $M(\boldsymbol{y})$ はモーメント行列と呼ばれる．実数列 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+^n}$ が与えられたとき，それをモーメントとしてもつ $\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度 μ が存在する（$\boldsymbol{y}$ は表現測度 μ をもつ，という）ための条件を問う問題はモーメント問題と呼ばれる重要な問題である．モーメント行列の半正定値性は，$\boldsymbol{y}$ が表現測度 μ をもつための必要条件であり，$n=1$ の場合は十分でもあること，$n \ge 2$ の場合は一般に十分でないことなどがわかっている．本研究では，Curto–Fialkow [1] による「モーメント行列のランクが有限ならば，モーメント行列の半正定値性は $\boldsymbol{y}$ が表現測度 μ をもつための必要十分条件である」という定理の証明を，半正定値とは限らない一般の複素数値モーメント行列の性質だけでどこまで議論が進むのかを調査することで，半正定値性が何において重要かを明らかにする．結果として，$\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ のイデアルである $\ker M(\boldsymbol{y})$ の共通の零点の集合 $V(\ker M(\boldsymbol{y}))$ に注目したとき，$M(\boldsymbol{y})$ が実対称半正定値ならば，$V(\ker M(\boldsymbol{y}))$ の元が全て実かつ単根である，という事実のみに半正定値性を利用することで上述の Curto–Fialkow [1] の定理が証明できることがわかる．なお，このロジックによる定理の証明の核となる道具は，Laurent [3]，Laurent and Rostalski [4] によってすでに言及されている定理である．

3 結果と今後の課題

本論文では以下の 3 点を扱った．

- 凸解析の分野の二者択一定理や非負多項式の特徴を与える定理，零点定理などを整理した．また，S-補題や凸関数に関する二者択一定理を応用して簡単な緩和問題を構成し，多項式時間で最適値が計算できる多項式計画問題の問題例を示した．
- モーメント問題における Curto–Fialkow [1] による定理に対して，モーメント行列の半正定値性の意味をとらえるために，半正定値とは限らない一般のモーメント行列の分解 [4] を利用して別証を与えた．
- Lasserre [2] による SDP 緩和の手法と，その利点についてまとめた．

多項式計画問題の最適値がサイズの小さな緩和問題の最適値として計算できる例が多く報告されている．本研究で扱った特殊ケースを足がかりに，なぜ最適値が得られるのか考察することが今後の課題である．

参考文献

[1] R. E. Curto and L. A. Fialkow. Solution of truncated complex moment problem for flat data. *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 119, No. 568, 1996.

[2] J. B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 11, pp. 796–817, 2001.

[3] M. Laurent. Revisiting two theorems of Curto and Fialkow on moment matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 133, pp. 2965–2976, 2005.

[4] M. Laurent and P. Rostalski. The approach of moments for polynomial equations. In *Handbook on Semidefinite, Cone and Polynomial Optimization*. to appear.