与信ポートフォリオにおける
損失率の近似的評価法に関する分析

76233　柳谷 雄太
指導教員　藤井眞理子　教授

2009 年 2 月 3 日 (火)

1　はじめに

金融機関は，大規模な与信（貸付）ポートフォリオを保有している．この与信ポートフォリオの最大損失率をある信頼水準の下で求める方法としては，モンテカルロ法 (以下 MC 法) を用いることが一般的であった．

これに対し，Gordy[1] は債務者やモデルに関する一定の仮定をおくことにより，任意の信頼水準の下での損失率の近似解を導出する方法を示した．Pykhtin and Dev[2] は Gordy[1] の枠組みを用いて，1 ファクターガウシアンコピュラモデルによる具体的な損失率の近似解析解を求めた．

本研究では [1]，[2] の枠組みを用いて，様々な貸付割合のポートフォリオを設定し，近似解析解の近似精度を検証した．また，与えられたポートフォリオに対し，今回の近似手法が適用可能か判断できるようにするため，近似精度に影響を与えるポートフォリオの特性について指標を用いて分析した．

2　漸近損失分布による損失率の近似

今，n 個の債務者からなる与信ポートフォリオが与えられているとする．X を確率変数，$q \in [0,1]$ とするとき，$\alpha_q(X) \equiv \inf\{x \in R : \Pr\{X \le x\} \ge q\}$ を $100q-$ パーセンタイルと定義する．債務者 i $(i = 1, \cdots, n)$ に対する貸付元本を A_i（定数），債務者 i から被る損失率を U_i とするとき，ポートフォリオの損失率を，$L_n = \sum_{i=1}^n U_i A_i / \sum_{i=1}^n A_i$ で定義する．U_i は確率変数で債務者がデフォルトしなかったときは 0，デフォルトしたときは，$U_i = Q_i \in (0,1]$ となる．

今回の近似手法を用いるには以下の仮定 4 つを満たすことが十分条件となる．

仮定 1　債務者 i のデフォルト時刻 t_i および U_i はシステマティックリスクファクター X に関して条件付独立である．

仮定 2　債務者数が $n \to \infty$ において，

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \to \infty \tag{1}$$

$$^{\exists}\xi > 0 \quad s.t \quad \frac{A_n}{\sum_{i=1}^n A_i} = O\left(n^{-\left(\frac{1}{2}+\xi\right)}\right) \tag{2}$$

が成り立つ．

仮定 3　システマティックリスクファクター X は単変量である．

仮定 4　債務者 i の条件付期待損失率 $\mathrm{E}[U_i|X]$ は連続で密度関数をもち，X の狭義単調減少関数である．

仮定 2 を満たすポートフォリオの損失分布を漸近損失分布と呼ぶ．また 1〜4 の仮定を満たしているとき，与信ポートフォリオの損失率の $100q-$ パーセンタイルは，

$$\alpha_q(L_n) \quad \simeq \quad \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}[U_i|X = \alpha_{1-q}(X)]A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \tag{3}$$

で近似的に求めることができる．現実問題には債務者数は有限であり，貸付割合が無視できるほどに小さくない場合には実際の損失分布と漸近損失分布の乖離が存在する．この乖離を埋めるための手段として，テイラー展開を利用したグラニュラリティ調整がある．これは以下の式で与えられる．

$$G_q(L_n) \quad = \quad -\frac{1}{2f(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{Var}[L_n|X = x]f(x)}{\mathrm{dE}[L_n|X = x]/\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x=\alpha_{1-q}(X)} \tag{4}$$

このグラニュラリティ調整を加えてやることにより，より正確な損失率の近似解が得られる．

3　デフォルト事象のモデル化

上記の漸近損失分布による近似解を 1 ファクターガウシアンコピュラモデルに適用する．デフォルト時刻 t_i の同時分布関数 F がガウシアンコピュラ，

$$F(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_{n,R}(\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \ldots, \Phi^{-1}(F_n(t_n))) \tag{5}$$

で表されると仮定する．$\Phi_{n,R}$ は相関行列 R の n 次元標準正規分布の分布関数を表す，F_i は t_i の周辺分布関数，Φ は標準正規分布の分布関数を表す．このとき，$\Phi^{-1}(F_i(t_i)) = Y_i$ とおいて，$Y_i = a_i X + \sqrt{1-a_i^2} Z_i$ でモデル化できる．a_i はファクターローディング，X はシステマティックリスクファクターを表し，$X \sim N(0,1)$，Z_i は債務者固有のリスクを表し，$Z_i \sim N(0,1)$ である．このとき，p_i を債務者 i のデフォルト確率としたとき，$Y_i < \Phi^{-1}(p_i)$ で債務者 i はデフォルトとなる．

また，μ，σ をパラメータとして，債務者 i がデフォルトしたときの損失率（loss given default:LGD）を $Q_i = \mu + \sigma W_i$ でモデル化する．W_i は文献 [2] に従い，ファクターローディング b_i，$\zeta_i \sim N(0,1)$ を用いて，$W_i = -b_i X + \sqrt{1-b_i^2}\zeta_i$ として，デフォルト確率と LGD の間にシステマティックリスクファクター X を通して，相関をもたせる．

以上の設定を漸近損失分布に適用すると，ポートフォリオの損失率の 100$q-$ パーセンタイルは，

$$\alpha_q(L_n) \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\mu - \sigma b_i \Phi^{-1}(1-q)\right) \times p_i \left(\Phi^{-1}(1-q)\right) \quad (6)$$

となり，近似解析解が得られる．ただし，$w_i = A_i / \sum_{j=1}^{n} A_j$ は貸付割合を表し，$p_i(\cdot)$ は条件付きデフォルト確率を表し，$p_i(x) = \Phi((\Phi^{-1}(p_i) - a_i x)/\sqrt{1-a_i^2})$ で求められる．

4 近似精度に関する数値実験

今回の近似手法の前提は，債務者数が無限で，個々の貸付割合が無視できるほどに小さいというものである．本研究では，上記のモデルによる近似解析解が様々な貸付割合の状況を設定したポートフォリオに対して，どの程度の近似精度を有するのか検証を行った．

ポートフォリオは債務者数，貸付割合に応じて 30 通り設定した．債務者数を 6 通り，貸付割合を不均一なものから順に，1 先集中型，2 段階型，3 段階型，5 段階型，均一型の 5 通り設けた．各ポートフォリオ内の貸付割合は表 1 の通りである．設定に関する詳細は本論文を参照されたい．

表 1: 各ポートフォリオ内の貸付割合

貸付割合の分布	貸付比率
1 先集中型	100:1
2 段階型	100:1
3 段階型	10:5:1
5 段階型	81:54:36:24:16

各ポートフォリオに対し，近似解析解（漸近損失分布による近似解＋グラニュラリティ調整）による損失率（A），MC 法による損失率（こちらを真値とみなす）（B）を求め，近似精度の指標として，乖離率 = (A − B)/B × 100(%) を算出した．パラメータは，$p_i = 0.01$，$a_i = \sqrt{0.2}$，$b_i = \sqrt{0.2}$，$\mu = 0.4$，$\sigma = 0.25$，$q = 0.999$ とした．シミュレーション回数は 10 万回である．この数値実験の結果をまとめたのが以下の図 1 である．

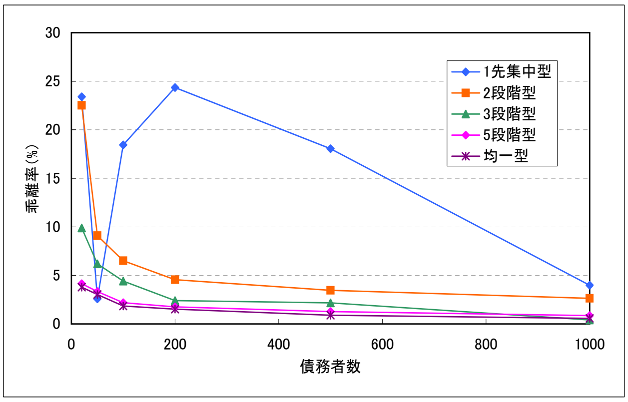

図 1: 各ポートフォリオの乖離率

これより，貸付割合が細分化されているポートフォリオほど近似精度が良好であることが分かる．またいずれの貸付割合型でも債務者数が増えれば，近似精度が良くなっていることが見てとれる．

続いて，具体的にポートフォリオのどのような特性が乖離率に影響するのか，貸付割合の集中度を表すハーフィンダール指数（$= \sum_{i=1}^{n} w_i^2$）を用いて分析を行った．各ポートフォリオに対しハーフィンダール指数を算出し，乖離率との関係を示したのが図 2 である．

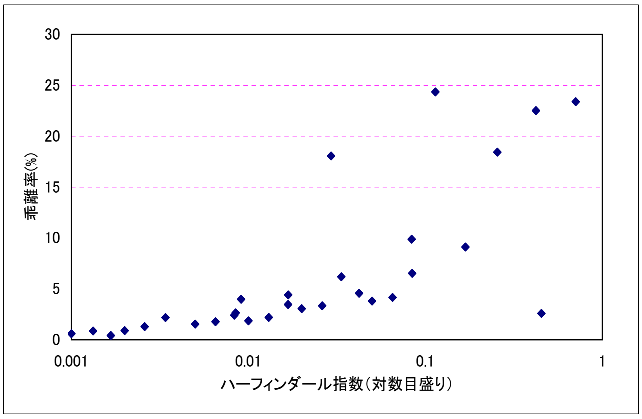

図 2: ハーフィンダール指数と乖離率の関係

これより，ハーフィンダール指数と乖離率にはおよそ正の相関があることが分かる．したがって，どのようなポートフォリオであれば，今回の近似手法が適用可能であるかを判断する 1 つの材料として，ハーフィンダール指数を用いることが有用であることが示された．

5 まとめ

漸近損失分布を 1 ファクターガウシアンコピュラモデルに適用した与信ポートフォリオの損失率の近似解析解の近似精度を検証した．その結果，3 段階型や 5 段階型ほどに細分化されているポートフォリオでは，近似精度が良好であることが分かった．また，今回の近似手法の適用範囲を探るため，近似精度に影響を与えるポートフォリオの特性について分析した．その結果，ハーフィンダール指数を用いて近似精度がおよそ説明できることが分かった．

参考文献

[1] Gordy, M. , "A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules," *Journal of Financial Intermediation*, Vol. 12, 2003, pp. 199-232.

[2] Pykhtin, M., and A.Dev, "Analytical approach to credit risk modelling," *Risk*, Vol. 15, 2002, pp. 26-32.