

# Analysis of minority game by step response

## ステップ応答によるマイノリティゲームの解析

数理情報学専攻 076212 木村 弦

指導教員 鈴木 秀幸 准教授

表 1: 戦略の例

ヒストリー	次の手
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

### 1 はじめに

複雑な挙動を示し、適応性があるエージェントベースのシステムが多くの特許業界から注目されている。その中で、Challet と Zhang によって紹介されたマイノリティゲームは ACF の重要なモデルである。本研究では、単純なルールでありながら、複雑な挙動を示すこのマイノリティゲームを分析すると同時に、危険資産の買い占めや供給量の減少の影響のダイナミクスを調査するために、標準的なマイノリティゲームにステップ入力を与え、それから引き起こされる現象の解析を行った。更に、ステップ応答時のマイノリティゲームの挙動のモデルを作成し、現実の市場における危険資産の動きとの比較を行った。本研究は、買い占めや、資産供給量の連続的な減少による価格の高騰を解析する上で、有効なアプローチになると考えられる。

### 2 マイノリティゲーム

マイノリティゲームはエージェント  $N$  (奇数) 人が (1), (0) のグループのどちらかを選択し、その結果人数が少ない方を選んだエージェントが勝ちというルールのゲームである。エージェントは過去に (1) が少数派だったか、(0) が少数派だったかの 2 値の履歴 (ヒストリー) を見る事ができ、その情報から次の手を決める。エージェントはヒストリーと照らし合わせて、次に (0) か (1) のどちらを選ぶかを決定する「戦略」を  $S$  個持ち、その戦略を見て次の手を決める (表 1)。エージェントは常に戦略にスコアをつけ、持っている戦略  $S$  個の中でスコアが最も高い物を使う。スコアは、その戦略で勝負に勝ったら +1 負けたら -1 される。市場においても、株の売り手が少数で、買い手が多数だったら、高い価格がついて、売り手が得をし、買い手が損をするので、マイノリティゲームになっていると考えられ、近年、マイノリティゲームの市場モデルへの拡張の可能性が注目されている。本研究では、時間  $t$  に (1) を選んだエージェントを買いのエージェントとし、人数を  $N_{buy}(t)$  とし、(0) を選んだエージェントを売りのエージェントとし、人数を  $N_{sell}(t)$  とする。また、価格モデ

ル  $P(t)$  を、

$$P(t+1) = P(t)e^{\frac{N_{buy}(t) - N_{sell}(t)}{N}}$$

とする。更に、 $N_{buy} - N_{sell}$  の平均的な動きを見るため、その前後  $t_r$  から平均を取った

$$w(t) = \frac{1}{2t_r + 1} \sum_{k=t-t_r}^{t+t_r} (N_{buy}(k) - N_{sell}(k)) \quad (1)$$

という値を用い、エージェントの行動の推移を見ることにした。

### 3 マイノリティゲームにおけるステップ応答

ここで、マイノリティゲームにおけるステップ応答の定義をする。本研究では、ステップ入力を「ある時間に、片方のグループだけを選ぶエージェントを発生させること」と定義する。また、この「片方のグループだけを選ぶエージェント」を本研究では、固定エージェントと呼ぶことにし、その数を  $N_{fix}$  とする。また、本研究においては、固定エージェントと言ったら、必ず (1) を選ぶエージェントとする。

この固定エージェントは、現実のある市場参加者のモデルとして考えることができる。例えば、固定エージェントが一斉に買いのグループを選んだとすれば、市場における、ヘッジファンド等の機関による買い占めのモデルとして考えられる。買い占めを行った際にエージェント一人一人がどのような挙動を示すかを解析し、現実の市場における市場参加者一人一人の動きを推測するのが本研究の最終的な目的である。

### 4 ステップ応答現象とそのモデル

ステップ入力を与えると、エージェントはステップ入力の方向とは逆の方向に動き、時間がたつと  $w(t)$  が

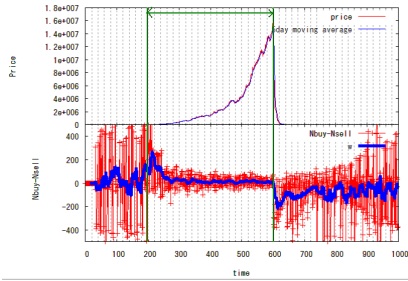


図 1: 価格モデルと  $N_{buy}(t) - N_{sell}(t)$ . ステップ入力  $t = 200$  から 600 まで.

ある値に収束する (図 1). この時の  $w(t)$  の推移のモデルを考える. ステップ応答時に戦略スコアは, 直線にノイズが乗った形に推移し, この戦略スコアの推移により,  $w(t)$  の動きが決定されていることが, 分析により分かった. 今, 戦略  $s$  のスコアの推移を,  $a_s$  を傾き,  $n_s$  を正規分布に従うノイズとして  $y_s(t) = a_s t + n_s(t)$  とする. 次に  $y_1$  と  $y_2$  の 2 つの戦略スコアが離れる時間を考える.

$$y_1(t) > y_2(t) \text{ を } t \text{ で解くと, } t > \frac{n_2(t) - n_1(t)}{a_1 - a_2}$$

となるが, このままでは, 離れる時間を求められないので,  $T$  個のノイズの最大値を用いると, 最適戦略時間は

$$t_o = \frac{\max\{n_2^1 - n_1^1, \dots, n_2^T - n_1^T\}}{a_1 - a_2}$$

と書ける.

ここで近似として,  $S$  個の戦略を, 最適戦略とそれ以外の戦略の集合というように 2 つの戦略で考えることにする. 最適戦略以外の戦略スコアの集合は, ノイズだけがのった傾き 0 の戦略スコアとすると,

$$t_o = \frac{\max\{n_2^1 - n_1^1, \dots, n_2^T - n_1^T\}}{a_1}$$

となる.  $t_o$  の確率密度関数を  $f_1(t)$  とすると,  $w(t)$  の微分は

$$\frac{dw(t)}{dt} = K_2 N q^A f_1(t) \quad (2)$$

と書ける. ただし,  $q^A$  は  $S$  個の戦略の中でステップ応答時に出現するヒストリーの集合  $A$  に対し, 最も 0 が多いものの 0 の割合の平均値で,  $K_2$  は最適戦略を見つけられるエージェントの割合である. 式 (2) から,  $w(t)$  を求め, プロットしたものが, 図 2 である. 但し,  $w(0)$  はステップの入力値としている. 図 1 と比べても, ステップを入れた直後の外形に似たものが得られている.

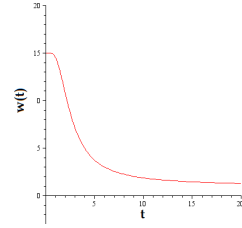


図 2: 戦略スコアのモデル化により導き出した  $w(t)$ .

## 5 原油価格データとの比較

図 3 は原油価格の価格から,  $w(t)$  をプロットしたものである. これは世界の石油供給量の 6% に及ぶ減産により, 価格が高騰している例であるが,  $w(t)$  がマイノリティゲームにおけるステップ応答のものと同様の動きをしているのがわかる. 本研究のモデルを用い, パラメータを推測することにより, この様な価格の高騰の際の市場参加者の行動を分析できる可能性がある.

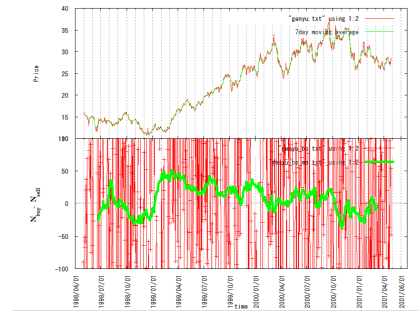


図 3: 1998 年 5 月から 2001 年 4 月までの WTI 原油先物価格の推移と  $w(t)$

## 6 おわりに

本研究では, マイノリティゲームの複雑な運動を分析するために, マイノリティゲームへのステップの入力を試みた. マイノリティゲームでのステップ入力を毎回同じグループを選択するエージェントの集団と定義し, ステップ応答時の戦略スコア推移から, ステップ応答時の需給差の挙動を表す式を導いた. また, それを用いて現実の危険資産の動きを解析しようとするアプローチを試みた. 本モデルは, 買い占めや, 資産供給量の連続的な減少による価格の高騰を解析する上で, 有効なアプローチになると考えられる.

課題としては, 現実のデータによる更なるモデルの検証や, トレンド投資を行うエージェントを混在させたシステムによる挙動のモデル化, 買い占めを行うエージェント群のモデル化等が考えられる.