修士論文審査資料

温度等高線を用いた四角形メッシュの生成法の改良

76207　岡部 美乃理
指導教員　杉原 厚吉　教授

2009 年 2 月 2 日

1　はじめに

CG やシミュレーションで一般的に用いられる物体の表面の表現方法として，三角形の集合で物体を近似した三角形メッシュがある．一方で，CG におけるテクスチャマッピングやシミュレーションにおける有限要素法などにおいては四角形メッシュのほうが望ましいとされる．本論文の目的は，与えられた三角形メッシュから四角形メッシュを自動生成する手法を確立することである．

既存の手法として，主方向など表面の方向場を数値積分によって辿る方法がある．しかし，数値積分は数値的に不安定であり，また，完全な四角形メッシュにならないという欠点を持つ．他に主方向に沿うように 2 次の最適化問題を解いてメッシュの頂点上に二つの関数 u, v を与え，関数値の等高線をひき四角形メッシュを生成する手法がある．同様の手法として，温度関数を与える従来のパラメトリゼーションを拡張した手法もある．この手法においては，解くべき問題が線形方程式であるという特長がある．

パラメトリゼーションを拡張した手法 [4] では，三角形メッシュから四角形メッシュへの変換が同相写像になるように人手でパッチ分割を行っていた．本論文ではこの手法に改良を加え，同相写像であることを保証するアルゴリズムを構成しパッチ分割の際のユーザ介入を不要とした．

2　手法の概要

提案手法では，メッシュ上の各頂点に関数 u, v の値を与えることで整数値の等高線から四角形メッシュを生成する．これを u-v 平面への写像を考えると，与えられたメッシュが円板と同相とは限らないので同相写像が存在しない場合がある．そこで，メッシュをいくつかの円板と同相な面の集合，即ちパッチに分割し，各パッチに対して平面への同相写像を構成することにする．ただし，等高線がパッチ境界において連続になるために，関数の整数値のジャンプと座標の回転を認めることにする．手法の概略は次のようになる：

1. パッチへの分割を行う．
2. メタ頂点の u, v の値とパッチ間の制約を決める．
3. パッチ境界上の重みを調節する．
4. 連立一次方程式を解き各頂点の u, v の値を得る．

以降，パッチ分割から導かれるメッシュをメタメッシュ，メタメッシュの頂点，辺，面をメタ頂点，メタ辺，メタ面と呼ぶ．四角形メッシュにおいて隣接する面の数が 4 以外であるような頂点は特異点と呼ばれ，特異点は少ないほうが望ましいとされる．メタ頂点は特異点の候補となっている．

3　手法の詳細

3.1　パッチ分割

文献 [4] ではパッチ分割はユーザに委ねられていたが，本論文では VSA 法 [1] を用いた．VSA 法では，各パッチが平面を近似するように分割され，その結果パッチ同士は曲率の大きい所で接する．四角形メッシュの特異点も曲率の大きい所に存在すべきなので，これは望ましい性質である．また，パッチの数を増減することで特異点の数を大まかにだが調節することができる．

3.2　パッチ間の制約の決定

手順 2. では，メタ頂点の接するパッチにおける u, v の値とパッチ間のジャンプの量と回転を決める．これは互いに独立には決定できない．そこで，メタメッシュ上で隣接するメタ頂点は等高線で結ばれるという制約を課す．つまり，各メタ面は u-v 平面上の直交多角形に写る．さらに，自己交差を避けるのと同相写像であることを保証するために，直交多角形は特に長方形に限るものとする．

まず，メタ頂点の u, v 値を決定するために，各メタ面の u-v 平面上の長方形の形状，つまり角度が $\frac{\pi}{2}$ になるメタ頂点とメタ辺の長さを決める．角度は，向かい合うパッチ境界の長さの差が最小化されるように選ぶ．メタ辺の長さは以下のように最適化問題に帰着して求める．向かい合うメタ辺の長さの和は等しい必要があるが，これはメタ辺の長さに対応する変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ と適当な行列 A を用いて $A\boldsymbol{x} = 0$

と表現できる．$\boldsymbol{c}$ で表される元のメッシュの最短パスの長さとの距離を小さくすることを考えると，スケールを考慮して次のような最適化問題に帰着される：

$$\begin{aligned} \min\ & \|\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{c}\| \\ \text{s.t. } & A\boldsymbol{x} = 0, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^n, \\ & \alpha \geq \epsilon. \end{aligned} \tag{$*$}$$

n はメタ辺の数，ϵ は十分小さい正数，$\mathbb{Z}_+$ は正整数の集合を表す．1-ノルムを用いると，これは混合整数線形計画問題に帰着され，効率的に解くことができる．

角度と長さが定まり，各メタ面に対応する u-v 平面上の形状が決まれば，各メタ面の任意のメタ頂点の座標とメタ辺の向きを適当に定めてやれば全てのメタ頂点の u, v 値が定まる．各パッチ境界におけるジャンプの量及び回転は自動的に定まる．

3.3 連立一次方程式への帰着

円板と同相な三角形メッシュを平面に写す方法の一つに，各頂点の u, v 値が隣接する頂点の u, v 値の加重平均になるように写像を定める重心座標を用いた手法がある．本論文でもこの手法を用いる．ただし，隣接する頂点がパッチをまたぐ場合はジャンプと回転を考慮する．結果として，従来の場合と同様，各頂点の u, v 値を求めるには連立一次方程式を解けばよいことになる．

4 同相写像であることへの保証

4.1 実行可能解の存在への考察

最適化問題 ($*$) は実行可能解を持たないことがある．一方，全てのメタ面が 4 個のメタ頂点を持つ，つまり次数が 4 の場合は実行可能解が必ず存在するので，全てのメタ面を次数が 4 になるように分割することを考える．あるメタ面が偶数個のメタ頂点を持つ場合，対応するパッチを適当に再分割することで，次数を 4 にすることができる．そこで本論文では，メタ頂点を追加することで，全てのメタ面が偶数次数にする方法を提案した．

4.2 重みの調節

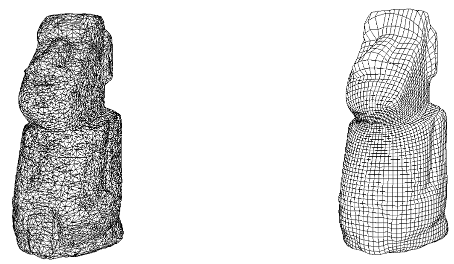
Floater の定理 [2] より，円板と同相な三角形メッシュが，3-連結であり，加重平均で用いる重みが全て正であり，メッシュの境界が凸多角形に写る場合，重心座標を用いた手法が必ず同相写像であることが言える．

各パッチに対してこれを適用する．3-連結性はパッチ境界の簡単な修正によって満たされる．また重みの正値性のため平均値座標 [3] を用いた．さらに，パッチ境界が凸多角形，つまり u-v 平面上の長方形に写るために，パッチ境界上の辺に十分大きな重みを与えた．

以上より，各パッチに対して Floater の定理を用いて同相写像であることが保証される．しかし，パッチ境界上の重みを増加することで，パッチ境界が目に見えるようになり四角形メッシュの品質を損なってしまう．そこで，手順 3. では，同相写像である限りパッチ境界上の重みを減らすということを行う．

5 実験結果

提案手法を実装し実験を行った結果を図 1 に示す．また，パッチ境界上の重みを増加させることで確かに同相写像になっていること，重みの調節によって生成される四角形メッシュの滑らかさが増していることも実験より確認できた．



(a) 元の三角形メッシュ　(b) 生成された四角形メッシュ

図 1　実行例

6 結論

本論文では，文献 [4] の手法を元に温度等高線を用いて三角形メッシュから四角形メッシュを生成する手法を提案した．メタメッシュに対して同相写像が存在しない場合，全てのパッチが偶数個のメタ頂点を持つようにする手法を提案した．さらに，パッチ境界上の重みを調節することでメッシュに対して必ず同相写像が得られるようにした．

現在は重みの調節のために繰り返し大規模な連立一次方程式を繰り返し解く必要があるので，より効率のよい方法の提案が今後の課題として挙げられる．また，生成される四角形メッシュの品質の向上のため，メタ頂点の位置の調節のような改善法の適用も，今後の課題である．

参考文献

[1] D. Cohen-Steiner, P. Alliez, and M. Desbrun. Variational shape approximation. *ACM Trans. Graph.*, 23, pp. 905–914, 2004.

[2] M. S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Comput. Aided Geom. Des.*, 14, pp. 231–250, 1997.

[3] M. S. Floater. Mean value coordinates. *Comput. Aided Geom. Des.*, 20, pp. 19–27, 2003.

[4] Y. Tong, P. Alliez, D. Cohen-Steiner, and M. Desbrun. Designing quadrangulations with discrete harmonic forms. In *Proc. SGP* (2006), pp. 201–210.