

三次元物体における Medial Axis の安定な推定法

076211 菅 和聖

指導教員 杉原 厚吉 教授

1 はじめに

Medial Axis (MA) は物体形状の基本的な表現方法の一つであり、これまでに様々な応用が考えられてきた。しかし、MA は物体形状の摂動に弱いという性質をもっており、安定的にこれを推定することは難しい。

今回、3次元の物体に対してその形状を表す多面体を入力として取り、MA を安定的に推定する手法を提案する。この手法は次のような特徴がある。

- 摂動によって出来た枝や面を削除できる
- ホモトピーを保存する
- くびれのある図形でもうまく動く
- 重みの閾値を上げることによって MA が単調に減少する

今までに3次元物体に対する MA の簡略化法の研究として様々な手法 [1, 4] が提案されているが、くびれのある図形を中心に低く評価したり、ホモトピーを保存するために複雑な操作を必要としている。

そこで本研究では、MA に単調な重みを与える戦略で2次元の物体に対する MA の簡略化を行った坂井ら [3] の手法を3次元の物体に対して拡張することを試みた。

2 Medial Axis の不安定性

物体 $X \subset \mathbb{R}^n$ は開集合であるとする。点 $x \in X$ と物体境界との最近点の集合を $\Gamma(x) = \{y \in X^c : d(x, y) = d(x, X^c)\}$ とする。このとき、物体内部の点のうち境界への最近点を2点以上持つ点の集合

$$\text{MA}[X] = \{x \in X : |\Gamma(x)| \geq 2\}$$

を物体 X の MA という。

MA は物体形状の摂動に対して不安定である。なぜなら、物体に僅かな摂動を加えただけで、MA に新たな枝を生じさせ、大きく変化してしまうからである。

入力となる物体形状のデータに含まれる観測誤差や数値誤差などの摂動によって生成された不要な枝を刈ることが MA の簡略化の動機である。

3 Curve Skeleton の定義

Dey ら [2] によって提案された Curve Skeleton (CS) の定義を述べる。CS は3次元の物体 $X \subset \mathbb{R}^3$ の1次元の中心軸である。物体 X は有界であり、境界 ∂X は滑らかかつ連結であるとする。

まず、次の Medial Geodesic Function (MGF) を定義する。この関数は、 $|\Gamma(x)| = 2$ となる点の集合 MA_2 上で定義される。

定義 1 (Medial Geodesic Function) $x \in \text{MA}_2$ に対して、 $\Gamma(x) = \{a_x, b_x\}$ であるとき、 a_x と b_x の境界 ∂X 上の距離を $f(x)$ とおく。この関数 f を MGF とする。

以下では MA の2多様体部分の極大部分集合の閉包を2多様体のシートと呼ぶ。これを用いて次の発散と CS を定義する。

定義 2 (発散) MA_2 の閉包上の点 x における発散を次のように定義する： x に隣接している各々のシートについて

$$\text{div}|_S(x) = \lim_{|B| \rightarrow 0} \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} \nabla f \cdot \mathbf{n} \, ds$$

とおく。ここで、 S は x に隣接するシート、 B は S における x の開近傍であり、 \mathbf{n} は B の境界における外向き法線ベクトルである。この $\text{div}|_S(x)$ を x のシート S における発散と定義する。

定義 3 (Curve Skeleton) MA のうち、隣接するすべてのシートにおいて発散が負になる点の集合を A とし、隣接するシートが存在しない点の集合を B とする。このとき、 $A \cup B$ の閉包を CS とする。

閉包をとっている理由は、孤立点が原因で非連結になることを防ぐためである。

4 Medial Axis と Curve Skeleton の重み

CS と MA 上のグローバルな重みを定義する。まず、MA の部分集合 A に対して対応する表面の面積の割合で重みを与え、ローカルな重みとする。すなわち、2多様体曲面の面積を S とするとき、

$$w(A) = 2 \cdot S\left(\bigcup_{x \in A} \Gamma(x)\right) / S(\partial X)$$

である。

次に、CS 上の点に対してグローバルな重みを定義する。仮定から X は1点にホモトピー同値であり、CS が1次元であることから、CS は木になる。点 $x \in \text{CS}$ で CS を切断すると、幾つかの部分木 T_1, \dots, T_k ($k \geq 2$) に分かれる。それぞれの木に対して ∇f に沿って MA のローカルな重

みを集めて重みを定める：

$$w \left(\bigcup_{y \in T_i} \text{SRC}(z) \right).$$

ここで、 $z \in \text{CS}$ に対して $\text{SRC}(z)$ とは、 $x \in \text{MA}$ を起点とする ∇f の流れが、 CS 上の点 z に到達するような点 x の集合である。 $x \in \text{CS}$ の重みは、この木 T_1, \dots, T_k の重みのうち、2番目に大きいものとする。

最後に、 MA 上の点 x のグローバルな重みは、 x から ∇f に沿って辿っていき、到達した CS 上の点の上で定めた重みとする。これが最終的に求めたかった重みである。

5 アルゴリズム

入力は3次元物体の表面メッシュ P である。

ステップ1 (MA の計算) : P の頂点を母点集合としてボロノイ図を作成し、 P の内部にあるボロノイ面を取り出し、 MA とする。

ステップ2 (CS の計算) : Dey ら [2] の方法に従って MA に含まれる辺を CS として選ぶ。 MA の面にたいして ∇f ベクトルを計算し、それらのベクトルがすべての隣接面において入ってくる辺を選ぶ。

ステップ3 (ラベル付け) : MA の面 F から、 ∇f 方向に面を辿って行ったときに初めて CS の辺 e に到達する。このとき、面 F を CS の辺 e でラベル付けする。

∇f に沿って辿る際は、面 F の中で発散が最小になる辺 e を選び、その辺に向かい合う面を次の面とする。もし、選んだ辺 e が3枚以上の面と接していたならば、発散の最も大きな面を次の面 F_{next} として選ぶ。

ステップ4 (重みの計算) : MA の頂点 v に対して双対のドロネー四面体を取る。この四面体の面のうち、多面体 P の境界上にある三角形の面積を P の総表面積で割り、2倍したものを v の重みとする。そして、頂点 v の重みを隣接する面の数で均等に割り、 v に隣接する面に配る。これで MA の面にローカル重みがついた。

CS の辺 e に対して、ラベルが e となる面のローカルな重みの和を取る。ここで、 CS の頂点 v で CS を切断して得られる部分木 T_1, \dots, T_k に対してそれぞれ CS の辺の重みを足して木の重みとする。それらの中で、2番目に大きい値を v の重みとする。 CS の辺の両端点の重みを平均して、 CS の辺のグローバルな重みとする。最後に、 MA の面 F のラベルが e ならば、面 F のグローバルな重みを e の重みで与える。

ステップ5 (穴埋め) : MA の面と CS の辺の和集合を Y とする : $Y = \text{MA} \cup \text{CS}$ 。ある閾値に対して、 Y から重みが閾値以下の MA の面と CS の辺を取り除いてできたものを「簡略化された MA 」と呼ぶ。任意の閾値 θ に対して、簡略化された MA がホモトピーを保存するようにしたい。

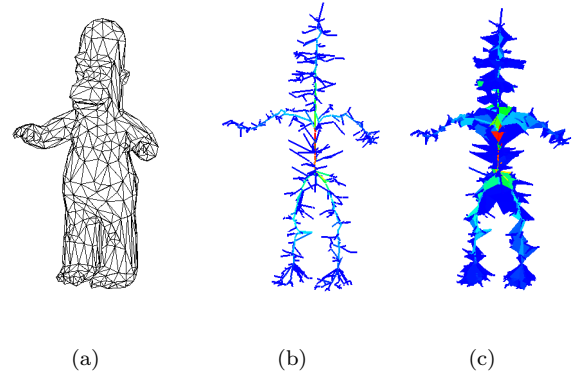


図1 (a) 多面体「Homer」、(b) CS 、(c) $\text{MA} \cup \text{CS}$ 重みが大きい部分が赤い色で示されている。

そこで、ある閾値に対して Y に穴が開いた場合、まず開いた穴の境界辺をループとして検出する。そして、 MA の中でループの内側に入っている面を復元する。

6 出力例

図1は、このアルゴリズムの出力例である。(a) が入力となる多面体、(b) が CS 、(c) が $\text{MA} \cup \text{CS}$ をそれぞれ表している。色は重みの高いところほど赤く塗られている。

MA を簡略化する際には、閾値 θ をユーザが指定し、それ以下の重みの MA の面と CS の辺を削る。万が一穴が開いていれば、その穴を埋める。

7 まとめ

本研究では3次元物体における Medial Axis の安定的な簡略化法を提案した。この方法は、 MA の点に単調性を持つ重みを構成し、閾値以下の点を削除することで簡略化を行う。その際、物体のホモトピーを保存し、くびれた図形の中心部分を高く重み付けするなどの特徴を持つ。

参考文献

- [1] T. K. Dey and W. Zhao: Approximating the medial axis from the Voronoi diagram with a convergence guarantee. *Algorithmica*, 2003, Vol. 38 (1), pp. 179–200.
- [2] T. K. Dey and J. Sun: Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function. In *Proceedings of the 4th Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 2006, pp. 143–152.
- [3] H. Sakai and K. Sugihara: Stable and topology-preserving extraction of medial axes. In *Proceedings of the 3rd International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, 2006, pp. 40–47.
- [4] A. Sud, M. Foskey and D. Monocha: Homotopy-preserving medial axis simplification. In *Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, 2005, pp. 39–50.