相補性条件に基づく接触問題の解の列挙手法

数理第 5 研究室　藤田 諒
指導教員　寒野 善博　准教授

2008 年 2 月 3 日

1　序論

弾性体が剛体と Coulomb 摩擦のもとで接触するとき，変形によって生じる内力と弾性体が剛体から受ける反力とが外力なしで釣り合う状態を wedged configuration と呼ぶ [2, 4]．この釣合状態は，コルク栓や瓶の蓋などのように日常的に観察されるものである．弾性体と摩擦係数が与えられたとき，wedged configuration となる変位と反力を求める問題を wedged problem という．この問題は，力学における摩擦つき接触問題の一種である．

摩擦つき接触問題の分野においては，準静的な問題に対する研究は盛んに行われている．一方で，wedged problem に対する先行研究は少ない．Barber ら [2] および Hassani ら [4] は，弾性体が線形連続体の場合を扱い，wedged configuration が存在するような摩擦係数の最小値が存在することを指摘した．また，この最小値を求める最適化問題を定式化した．前者は非線形の固有値問題とみなすことで，また後者は遺伝的アルゴリズムを適用することで，この問題の解を得るためのアルゴリズムを提案した．ただしこれらの手法では大域的最適解を得られるとは限らない．

本研究では，有限要素に離散化された線形弾性体に対する wedged problem を定式化し，その性質を明らかにすることを目的とする．まず解集合全体の構造に着目し，2 次元 wedged problem の解集合は線形相補性問題とみなすことで列挙可能であることを示し，そのためのアルゴリズムを設計する．次に，3 次元の問題に対しては，これに加えて分枝限定法や 2 次錐計画法を用いて解集合の表現が得られることを示す．最後に，先行研究で触れられていた摩擦係数の最小値を求める問題に対して，大域的最適解を得られることを示す．

2　有限次元 wedged problem の定式化

m_0 個の節点に離散化された $d\ (=2,3)$ 次元空間内の線形弾性体と空間内に固定された剛体を考える．微小変形・微小ひずみを仮定すると，wedged configuration となるための釣合式は，正定値対称な剛性行列 $K^0 \in \mathbb{R}^{dm_0 \times dm_0}$ を用いて $K^0 u^0 = r^0$ と書ける．ここで u^0 は弾性体の変位，r^0 は剛体から受ける反力である．

全節点のうち，剛体と接触しうる節点の個数を m とする．接触候補の第 i 節点の変位ベクトルを，剛体表面における弾性体の内向き法線方向の成分 $u_{\mathrm{n}_i} \in \mathbb{R}$ および接線方向の成分 $u_{\mathrm{t}_i} \in \mathbb{R}^{d-1}$ に分解し，$u_i = (u_{\mathrm{n}_i}\ u_{\mathrm{t}_i})^\top$ で表す．これらを並べたものを弾性体の変位ベクトル $u = (u_1 \cdots u_m)^\top \in \mathbb{R}^{dm}$ とする．ここで，$u_{\mathrm{n}} = (u_{\mathrm{n}_1}\ \ldots\ u_{\mathrm{n}_m})^\top$ と書くことにする．また，反力ベクトル r^i, r, r_{n} を同様に定義する．

接触境界上での制約条件は片側接触条件

$$u_{\mathrm{n}} \geq 0,\ r_{\mathrm{n}} \geq 0,\ u_{\mathrm{n}}^\top r_{\mathrm{n}} = 0$$

を考え，各節点 i において反力の垂直成分 r_{n_i} と水平成分 r_{t_i} の間には，所与の摩擦係数 $\mu > 0$ に対して Coulomb 摩擦則 $\|r_{\mathrm{t}_i}\| \leq \mu r_{\mathrm{n}_i}$ が成り立つとする．

節点に対する拘束条件としては，上記の接触候補，変位指定および自由節点の 3 種類を考える．Schur complement の手法を用いて変位指定と自由節点の変数を消去すると，解くべき問題は接触候補の節点の変位 u と反力 r に関する以下のような問題であることがわかる：

wedged problem (WP)

$$\begin{aligned} \text{given}: &\ \text{正定値対称行列}\ K \in \mathbb{R}^{dm \times dm},\ \mu > 0 \\ \text{find} &\ \ u, r \in \mathbb{R}^{dm} \\ \text{s.t.} &\ \ Ku = r, \\ &\ \ u_{\mathrm{n}} \geq 0,\ r_{\mathrm{n}} \geq 0,\ u_{\mathrm{n}}^\top r_{\mathrm{n}} = 0, \\ &\ \ \|r_{\mathrm{t}_i}\| \leq \mu r_{\mathrm{n}_i},\ i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1}$$

3　2 次元 wedged problem の解集合の特徴づけ

2 次元平面上の wedged problem (1) の解である変位と反力 $v = (u\ r)^\top$ の集合 $\mathcal{S}$ の性質を考える．なお，この内容は，第 5 節で述べるように 3 次元空間内の問題にも近似的に適用可能である．de Moor ら [5] が線形相補性問題の解の列挙に対して行ったのと同様に，(1) の制約条件のうち相補性条件

$$u_n^\top r_n = 0 \tag{2}$$

以外を満たすものの集合を考え，これを $\mathcal{C}$ とおく：

$$\mathcal{C} = \left\{ v = \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} Ku = r,\ u_{\mathrm{n}} \geq 0,\ r_{\mathrm{n}} \geq 0, \\ \forall i:\ \|r_{\mathrm{t}_i}\| \leq \mu r_{\mathrm{n}_i} \end{matrix} \right\}. \tag{3}$$

2 次元平面上の問題では摩擦則が線形不等式 $-\mu r_{\mathrm{n}_i} \leq r_{\mathrm{t}_i} \leq \mu r_{\mathrm{n}_i}$ であるため，$\mathcal{C}$ は有限個の線形不等式で表される凸多面錐となる．凸多面錐は，extreme ray と呼ばれる有限個のベクトルの非負結合で表せることが知られている．$\mathcal{C}$ の extreme ray のうち，相補性条件を満たすものを $v^1, \ldots, v^p$ とし，これらに着目する．添字集合を $B \subseteq \{1, \ldots, p\}$ とする複数の extreme ray が cross complementary であることを以下のように定義する [5]：

定義 3.1 添字集合 $B \subseteq \{1, \ldots, p\}$ に対して，$\mathcal{C}$ の extreme ray で相補性条件を満たすものの族 $\{v^i\}^{i \in B}$ が cross complementary であるとは，$\sum_{i \in B} v^i$ が相補性条件を満たすことをいう．

これは $\{v^i\}^{i \in B}$ を extreme ray とする凸多面錐 $\mathcal{C}_B = \left\{ \sum_{i \in B} \lambda_i v^i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}$ の要素がすべて相補性条件を満たすことを意味する．力学的には，$\mathcal{C}_B$ に属するすべての釣合状態で各節点の剛体との接触・非接触が揃っていることに対応する．

さて，$\mathcal{C}$ の要素でさらに相補性条件 (2) を満たすもの全体が wedged problem の解集合 $\mathcal{S}$ である．$\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}$ の extreme ray のうち相補性条件を満たすものを用いて次のように表せる：

命題 3.2 $\mathcal{C}$ の extreme ray で相補性条件を満たすものを $v^1, \ldots, v^p$ とすると，$\mathcal{S}$ は

$$\mathcal{S} = \bigcup_{B \subseteq \{1, \ldots, p\}} \left\{ \mathcal{C}_B \middle| \left\{ v^i \right\}^{i \in B} : \text{cross comp.} \right\} \tag{4}$$

と書ける．

この特徴づけにより，$\mathcal{S}$ の無限個の要素を列挙することが可能になる．すなわち，$\mathcal{C}$ の extreme ray のうち相補性条件 (2) を満たすもの $v^1, \ldots, v^p$ と，(4) の右辺の条件を満たす添字集合 $B \subseteq \{1, \ldots, p\}$ とを列挙すればよい．

4　2 次元 wedged problem の解の列挙手法

前節の特徴づけに基づく 2 次元 wedged problem の解の列挙手法を提案する．添字集合の列挙はグラフのクリーク列挙に帰着できることが知られているため [5]，ここでは相補性条件を満たす extreme ray の列挙に限って述べる．

凸多面錐の extreme ray を列挙する手法としては，double description method [3] や reverse search [1] に基づくものなどがある．したがって，これらの手法を用いて先に $\mathcal{C}$ の extreme ray を列挙し，その後で相補性条件を満たすもののみ残すという手法がまず考えられる．しかし，WP の実際の問題例では，$\mathcal{C}$ の extreme ray の数は，そのうちで相補性条件を満たすものの数より非常に大きいことが期待される．実際，数値実験の結果でもそのようになり，既存手法を用いたアルゴリズムは効率が良くなかった．

本研究では，2 次元 wedged problem に対して，問題の線形制約が表現する凸多面錐の extreme ray のうち，相補性条件を満たすもののみ列挙する次のようなアルゴリズムを設計した：

Step 1. 変位 u または反力 r を消去し，釣合式と摩擦則が表現する凸多面錐の extreme ray を列挙する．これらは剛性行列と摩擦係数から容易に計算できる．

Step 2. 節点 $i = 1, \ldots, m$ に対して以下を行い，現在の extreme ray を更新する：

1. 制約式 $u_{\mathrm{n}_i} \geq 0$ を追加する．現在の ex. ray のうち $u_{\mathrm{n}_j} > 0$ を満たすもの v^j と $u_{\mathrm{n}_k} < 0$ を満たす v^k に対して，v^j と v^k との内分点で制約式上にあるものを現在の ex. ray の集合に追加する．ただしこの追加は以下の条件を満たす v^j, v^k に対してのみ行う：
   (a) 節点 $1, \ldots, i-1$ において符号パターンが揃っている；
   (b) 制約式 $Ku = r$, $|r_{\mathrm{t}}| \leq \mu r_{\mathrm{n}}$, $u_{\mathrm{n}_j} \geq 0$ $(j = 1, \ldots, i-1)$ に関して隣接している．
2. 現在の ex. ray から，$u_{\mathrm{n}_k} < 0$ を満たすものと $u_{\mathrm{n}_j} > 0$ かつ $r_{\mathrm{n}_j} > 0$ を満たすものをすべて削除する．

Step 3. 現在の ex. ray を出力して終了する．

5　3 次元 wedged problem の解の列挙手法

3 次元 wedged problem においては，摩擦則の非線形性から 2 次元平面上の場合のように解集合自体を列挙することはできない．よって，3 次元 WP の解の列挙問題においては，解の相補変数の符号パターンを列挙することが目標となる．この符号パターンは以下のような手法で列挙できる：

- 第 4 節で述べたアルゴリズムを近似的に用いたあと，厳密な解の符号パターンであるかどうかを判定する．
- 相補変数に関する分枝限定法を用いる．

いずれの場合も，摩擦則が 2 次錐制約であることから，ある符号パターンに対応する WP が 2 次錐計画問題 (SOCP) として書けることがアルゴリズムの効率的な実行のために重要である．

6　WP に非自明な解が存在する摩擦係数の最小値

先行研究で指摘されているように，wedged problem には非自明な wedged configuration が存在するような摩擦係数 μ の最小値が存在する [2, 4]．第 5 節で述べたように，符号パターンを 1 つ固定すると WP は SOCP として書ける．したがって，この摩擦係数の最小値を求めるためには以下のようにすればよい：

Step 1. 第 3, 4 節の手法を用いて，十分大きな摩擦係数に対して解の符号パターンを列挙する．

Step 2. 上で得られた各符号パターンに対して，摩擦係数を 2 分探索などに基づいて動かし，摩擦係数の最小値を求める．非自明な解が存在するかどうかは，対応する SOCP を解くことで判定する．

Step 3. Step 2 で得られた値のうち，最小のものを出力する．

なお，2 次元平面内の問題では step 2 で解くべき問題は線形計画問題となる．

7　結論

本研究では，先行研究にならって有限次元の wedged problem を定式化し，その性質を考察した．得られた結果は以下のようになった：

1. 2 次元 WP の解の列挙のため，与えられた問題に対して相補性条件を満たす extreme ray のみ列挙するアルゴリズムを構成した．
2. 3 次元 WP の解の符号パターンは，SOCP と，上記のアルゴリズムまたは分枝限定法との組合せで列挙できることを示した．
3. 非自明な解が存在するような摩擦係数の最小値を求める問題に対して，大域的最適解を得るアルゴリズムを提案した．

今後の課題としては，より大きなサイズの問題に対する数値実験を行うことや，より広い接触問題のクラスへ提案手法を適用することなどが考えられる．

参考文献

[1] D. Avis and K. Fukuda. Reverse search for enumeration. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 65, pp. 21–46, 1996.

[2] J. R. Barber and P. Hild. On wedged configurations with Coulomb friction. In P. Wriggers and U. Nackenhorst, editors, *Analysis and Simulation of Contact Problems*, Vol. 27 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, pp. 205–213. Springer, 2006.

[3] K. Fukuda and A. Prodon. Double description method revisited. In *Combinatorics and Computer Science*, Vol. 1120 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 91–111. Springer-Verlag, 1996.

[4] R. Hassani, I. R. Ionescu, and E. Oudet. Critical friction for wedged configurations. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 6187–6200, 2007.

[5] B. de Moor, L. Vandenberghe, and J. Vandewalle. The generalized linear complementarity problem and an algorithm to find all its solutions. *Mathematical Programming*, Vol. 57, pp. 415–426, 1992.