

自己釣合条件に基づくテンセグリティ構造の形状設計

数理第 5 研究室 江原 慎太郎
指導教員 寒野 善博 准教授

1 概要

構造物に外力が存在せず、かつ非零の内力が存在して静的な釣り合いを満たす状態のことを、自己釣合状態と呼ぶ。本研究では、圧縮力のみを負担するストラットと、引張力のみを負担するケーブルという、性質の異なる 2 種類の部材がピンで接合された構造物を扱う。このような構造物のうち、自己釣合状態を満たし、かつストラットが節点を共有しないものを、テンセグリティと呼ぶ [1]。

テンセグリティの形状設計問題 [2] において、従来の手法では、ストラットが連続しない条件を直接扱うことは非常に困難であった。本研究ではこれを克服する方法として、グランドストラクチャ法を用いた、2 段階の混合整数計画問題を解く手法を提案する。グランドストラクチャ法とは、離散構造物のトポロジー最適化のために用いられる手法である [3]。本研究では、さらに、釣合式の解空間の性質を生かして、余分なケーブルの取り除かれたテンセグリティの列挙法についても述べる。

2 問題設定

グランドストラクチャ (初期形状) は、十分に密なグラフ $G = (V, E)$ の形で与える。頂点集合 V には 3 次元空間での座標も与えておく。これは、釣合位置での節点の位置である。枝集合 E は部材の候補を表す。 $|V| = n$, $|E| = m$ とする。図 1 はグランドストラクチャの例である。

次に、各節点での釣合式について述べる。部材の種類と軸力の値は表 1 のように定められ、釣合式は釣合行列 H を用いて、

$$Hq = 0 \quad (1)$$

と書ける。式 (1) の左辺は内力をまとめたものであり、右辺は外力である。釣合行列 H は部材の方向余弦ベクトルを並べたもので、初期形状のグラフ G と節点座標より求めることができる。式 (1) において、非零のベクトル q が存在することを、自己釣合条件と呼ぶ。

グランドストラクチャ法を用いたテンセグリティの形

表 1 部材の種類と軸力の正負との対応関係

部材 i の種類	軸力 q_i の値
ケーブル	正
部材なし	零
ストラット	負

状設計問題は、与えられたグラフ G から求めた釣合行列 H に対し、テンセグリティとなる条件を満たすような非零の軸力ベクトル q を求める問題として書ける。

3 混合整数計画問題の定式化

テンセグリティの形状設計問題を、次のような 2 段階の混合整数計画問題として定式化を行った。2 段階の問題に分けて定式化するのは次の理由による。この問題は 1 つの混合整数計画問題としてまとめて定式化することもできるが、この問題の計算は実用的な時間では終了しない。そこで解くべき問題を 2 段階に分けることで、計算時間を短縮するためである。

3.1 混合整数計画問題 (MIP-1)

与えられたグランドストラクチャに対し、まずストラット配置を決めることを考える。これは混合整数計画問題 MIP-1 として次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 & \text{[MIP-1]:} \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \max_{q, x} \sum_{i=1}^m x_i \\
 & \text{s. t. } Hq = 0, \\
 & \sum_{i \in E(n_j)} x_i \leq 1, \quad \forall n_j \in V, \\
 & -Mx_i \leq q_i \leq M(1 - x_i) - \varepsilon, \quad \forall i \in E, \\
 & q \in \mathbb{R}^m, x \in \{0, 1\}^m.
 \end{aligned} \right\} \quad (2)
 \end{aligned}$$

MIP-1 において、変数は軸力ベクトル $q \in \mathbb{R}^m$, およびストラットの本数を表す 0-1 変数 $x \in \{0, 1\}^m$ であり、定数は $\varepsilon, M (0 < \varepsilon \ll M)$ である。制約式における $E(n_j)$ は、節点 n_j に接続する部材集合を表す。

MIP-1 が、ストラットの不連続条件を適切に表現していることを確認する。 $x_i = 1$ のとき部材 i はストラット ($q_i < 0$), $x_i = 0$ のとき部材 i はケーブルもしくは部材なし ($q_i \geq 0$) である。各節点について、接続するスト

ラット数が $\sum_{i \in E(n_j)} x_i \leq 1$ を満たすことより従う。

MIP-1 の最適解において $x \neq 0 (\Leftrightarrow q \neq 0)$ であるとき、自己釣合条件を満たすので、与えられたグラウンドストラクチャからテンセグリティが得られる。一方、 $x = 0$ のときは得られない。

この MIP-1 を解いて得られるテンセグリティは一般に、余分なケーブルを含んでいる。

3.2 混合整数計画問題 (MIP-2)

各部材の長さを一定にしたまま各部材の軸力を調節することで、張力がゼロとなるケーブルが存在する。こういった余分なケーブルを、MIP-1 の最適解 q^* から取り除くことを考える。

[MIP-2] :

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{q}, \mathbf{y}} \quad \sum_{i=1}^{m'} y_i \\ \text{s. t.} \quad H\mathbf{q} = \mathbf{0}, \\ \quad \quad q_i \leq -\varepsilon, \quad \forall i \in E_{\text{strut}}, \\ \quad \quad 0 \leq q_i \leq My_i, \quad \forall i \in E_{\text{cable}}, \\ \quad \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m'}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^{m'}. \end{array} \right\} \quad (3)$$

MIP-2 において、変数は軸力ベクトル $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ およびケーブルの本数を表す 0-1 変数 $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^m$ あり、定数は $\varepsilon, M (0 < \varepsilon \ll M)$ である。 E_{strut} および E_{cable} はそれぞれ、MIP-1 の最適解 q^* におけるストラット、ケーブルの部材番号の集合である。MIP-2 における行列 H は、MIP-1 の行列 H から $q_i^* = 0$ に対応する列ベクトルを消去し、改めて釣合行列 H および軸力ベクトル \mathbf{q} を構成したものである。

MIP-2 を解くことで、ストラットの配置を保ったまま余分なケーブルを除くことができる。

3.3 例題

図 1 のグラウンドストラクチャに対し、MIP-1 および MIP-2 を解くことで、図 2 のテンセグリティが得られた。

4 余分なケーブルを除いた構造の列挙

$H\mathbf{q} = \mathbf{0}$ の解空間のうち、MIP-1 の最適解 q^* の符号条件を満たす空間 W は次のように定義できる。

$$W = \left\{ \mathbf{q} \mid \begin{array}{l} H\mathbf{q} = \mathbf{0}, \\ q_i \leq 0, \quad \forall i \in E_{\text{strut}}, \\ q_i \geq 0, \quad \forall i \in E \setminus E_{\text{strut}} \end{array} \right\}. \quad (4)$$

ここで空間 W は \mathbb{R}^m 上の凸多面錐の \mathcal{H} -錐表現である。任意の \mathcal{H} -錐で表わされた凸多面錐は、extreme ray の非負結合 (\mathcal{V} -錐) で表現できる。この extreme ray は不静定次数 1 の構造 (余分なケーブルを含まない構造) に対応している。Extreme ray の組み合わせを考えるこ

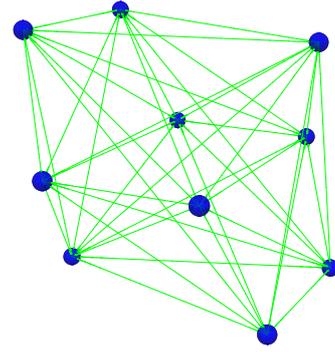


図 1 グラウンドストラクチャ

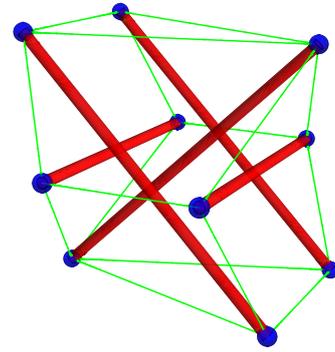


図 2 余分なケーブルを除いたテンセグリティ

とにより、MIP-2 で求められる構造が列挙できる。図 2 のテンセグリティと同じストラット配置の構造は、表 2 に示したように 12174 個ある。

表 2 列挙された 12174 個の構造の分類

ストラットの本数	ケーブルの本数	個数
5	18	12171
5	17	2
5	16	1

参考文献

- [1] R. Motro. *Tensegrity*. Kogan Page Science, London, 2003.
- [2] A. G. Tibert and S. Pellegrino. Review of form-finding methods for tensegrity structures. *International Journal of Space Structures*, Vol. 18, No. 4, pp. 209–223, 2003.
- [3] U. Kirsch. Optimal topologies of truss structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, Issue 1, pp. 15–28, 1989.