劣モジュラシステムに対する
最大隣接及び最小次数順序付け
アルゴリズムの実装と実験的考察

76223 並木隆一
指導教員　牧野和久 准教授

平成 21 年 2 月 3 日

1　はじめに

劣モジュラシステムは, 集合族のもつ構造として多くの組合せ最適化問題に現れる. 劣モジュラ関数の最適化については, 1970 年に Edmonds によって重要性が指摘されて以来, 非常に研究活動が盛んである. 例えば最小化に関しては, 1981 年には Grotschel, Lovász, Schrijver らにより, 楕円体法を用いた最初の多項式時間アルゴリズムが示されている. そして, 現在最速のアルゴリズムが, Iwata, Fleischer, Fujishige らにより開発されている [1]. しかしながら, これらで提案されているアルゴリズムの基盤となり易い最大隣接順序付けと最小次数順序付けの比較はあまりされていない.

そこで本研究では, 各順序付けを実装し, 応用例として最小カット問題への適用も実験した. その結果, グラフの縮約時に, 最大隣接順序付けは順序が変化し易いのに対し, 最小次数順序付けは順序が変化しにくいという結果を得た. これについて考察したところ, 最小次数順序付けを用いて, 再順序付けを高速化する事に成功した.

2　劣モジュラシステム

本論文では, 関数を劣モジュラ関数に限定して考える.

定義　f が劣モジュラ関数であるとは, 任意の $X, Y \subseteq V$ に対して,

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

が成立する事である. 集合 V と劣モジュラ関数 f の対 (V, f) を劣モジュラシステムと言う.

3　最大隣接順序付け

有限集合 V　$(|V| = n)$ と $1 \leq^{\forall} i \leq^{\forall} j \leq n$ に対して, 順序付け $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が以下の条件を満たせば, σ は V の最大隣接順序付けと言う:

$$f(v_i) - f(V_{i-1} + v_i) \geq f(v_j) - f(V_{i-1} + v_j).$$

但し, 上式にて $V_0 = \phi, V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$　$(1 \leq i \leq n-1)$ とする. $u, v \in V$ が次の条件を満たす時, f の pendent ペアであると言う: u と v を分離する任意の $X \subset V$ に対して,

$$f(X) \geq \min\{f(u), f(v)\}.$$

最大隣接順序付けと pendent ペアに関して, 次の定理が成立する.

定理 1(Queryanne[3])　劣モジュラシステム (V, f) が与えられた時, $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が最大隣接順序付けになっていたとする. この場合, σ の最後の二つの要素 v_{n-1} と v_n は f の pendent ペアとなる.

4　最小次数順序付け

有限集合 V　$(|V| = n)$ と $1 \leq^{\forall} i \leq^{\forall} j \leq n$ に対して, $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が以下の条件を満たせば, π は V の最小次数順序付けと言う:

$$f(v_i) + f(V_{i-1} + v_i) \leq f(v_j) + f(V_{i-1} + v_j).$$

但し, 上式にて $V_0 = \phi, V_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$　$(1 \leq i \leq n-1)$ とする. $u, v \in V$ が次の条件を満たす時, f の flat ペアであると言う: u と v を分離する任意の $X \subset V$ に対して,

$$f(X) \geq \min_{x \in X} f(x),$$

最小次数順序付けと flat ペアに関して, 次の定理が成立する.

定理 2(Nagamochi[2]) 劣モジュラシステム (V, f) 与えられた時, $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ が最小次数順序付けになっていたとする. この場合, π の最後の二つの要素 v_{n-1} と v_n は f の flat ペアとなる.

5 最小カット問題への適用

最大隣接順序付けを用いて求める方法 最大隣接順序付けの最後の 2 つの要素, v_{n-1}, v_n が pendent ペアになる事を利用する. pendent ペアの定義より, v_{n-1} と v_n を分離するような最小カットは存在しない. 一方, $\{v_{n-1}\}$ と $\{v_n\}$ は最小カットの候補となる. ゆえに, これのみ調べる. そして v_{n-1}, v_n を縮約し, 再び最大隣接順序付けする. これを, 頂点が 2 点になるまで繰り返せばよい.

最小次数順序付けを用いて求める方法 最小次数順序付けの最後の 2 つの要素, v_{n-1}, v_n が flat ペアになる事を利用する. flat ペアの定義より, v_{n-1} と v_n を分離するような最小カットは存在しない. 一方, $1 \leq i \leq |V|$ に対し, $\{v_i\}$ と, 最後の 2 つの要素を縮約した $\{v_{n-1,n}\}$ は最小カットの候補となる. ゆえに, これらのみ調べる. そして, v_{n-1}, v_n を縮約し, 再び最小次数順序付けする. 再度, 最後の 2 つの要素を縮約したものだけ候補として調べる. これを, 頂点が 2 点になるまで繰り返せばよい.

6 比較と高速化

本研究では, 最大隣接順序付けと最小次数順序付けを実装し比較した. すると, 最小カット問題を解く際に最小次数順序付けを用いれば, 縮約毎の順序の変化が少ない事が分かった. 考察の結果, 最小次数順序付けにおいて最後の 2 つの頂点間の重みが, 各頂点のカット関数値の $\frac{1}{2}$ 以下である場合, 再順序付けを省略できるという事が分かった. 更に, 全体でのカット関数値と比較した場合には条件が成立していなかったとしても, $V_i' = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-2}\}$ から生成される誘導部分グラフ上においてのカット関数値と比較して条件が成立している場合は, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$ までは再順序付けする必要がない事が分かった. ゆえに, V_i' と最後の 2 つの頂点感の重みを $i = n-2$ の状態から比較し, 不等式が成立するまで i を 1 ずつ減らしていく事によって, 最も良い効率を得られる. これを利用し, 最小次数順序付けを改良する事で高速化に成功した. 図 1 は, 通常の最大隣接順序付け (MA), 最小次数順序付け (MD), そして改良後の最小次数順序付け (Modified MD) を用いて最小カット問題を解いた際の, 頂点数と計算時間の関係である. 大幅に計算速度が向上している事が分かる. しかし,

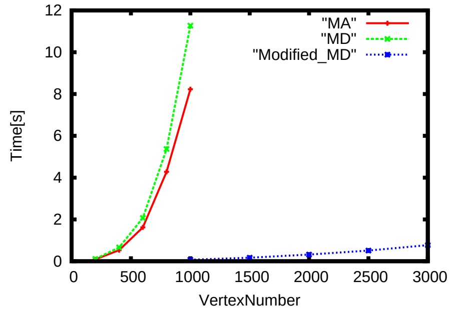

図 1: 頂点数と計算時間 [s]

既存の手法では濃度が計算時間に影響しなかったのに対し, 提案手法では濃度が強く影響する. 図 2 が濃度と計算時間の関係である.

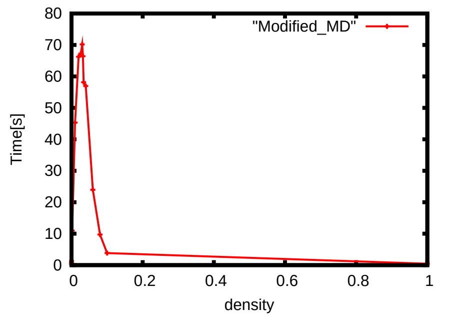

図 2: 濃度と計算時間 [s]

参考文献

[1] S. Iwata, L. Fleischer, and S. Fujishige, A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions, *Journal of the ACM*, 48(2001), 761–777.

[2] H. Nagamochi, A simple extreme subsets algorithm for submodular and posi-modular set functions, *Technical Report 2007–006*, Dept. of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, 2007.

[3] M. Queryanne, Minimizing symmetric submodular functions, *Mathematical Programming*, 82 (1988), 3–12.