一般因子問題の解法とマトロイド構造に関する研究

76222 中村 彰
指導教員 室田 一雄教授
2009 年 2 月 3 日

1　はじめに

マッチング問題は組合せ最適化の起源とも言える古典的な問題であるが, その多項式時間解法や構造定理における線形計画法を超えた枠組みを通して, 現在もその様々な拡張がこの分野の研究対象となっている.

本研究ではマッチング問題の拡張として一般因子問題とパッキング問題を対象とし, マトロイドと呼ばれる離散構造を通して両者における共通の構造を明示する. 特にその帰結として三角形-枝パッキング問題の, マッチング問題における増加道探索を用いたシンプルな解法を提案した. さらに提案した解法を実装して数値実験を行い, その結果を通してマッチング問題とパッキング問題の諸性質をそれぞれ調べ, またその比較を行った.

2　マッチング問題

与えられたグラフ $G = (V, E)$ の中でどの枝同士も端点を共有しないように枝を集める問題を最大マッチング問題と呼ぶ. 現在のマッチングを $M \subseteq E$ としたとき, M の枝とそうでない枝を交互に使って M に被覆されない 2 頂点を結ぶ道を M-増加道と呼び, 最大マッチングを求める上では増加道の探索がその本質的な概念である. 2 部グラフにおけるその解法は以前から線形計画法の枠組みの中で得られていたが, 一般のマッチング問題の増加道探索による多項式時間アルゴリズムは, Edmonds [3] による奇閉路と増加道の縮約と展開といったアイディアによって初めて得られた. 本章ではこの Edmonds のアルゴリズムの全容と, それに付随して最適性条件を記述する構造定理について説明し, さらに各頂点に接続する枝の本数が指定された部分グラフの存在を判定する問題 (因子問題) も同様の枠組みで解かれることを述べた.

3　一般因子問題

グラフ $G = (V, E)$ において各頂点に接続する枝の本数の候補が複数指定され, 制約を全てみたす部分グラフの存在を判定する問題を一般因子問題と呼ぶ. Cornuéjols [1] は各制約 H_v $(v \in V)$ が集合として大きさ 2 以上の穴を持たない場合について, 最適化の観点から問題を次のように定式化し通常の因子問題 ($H_v = \{f_v\}$ の場合) をサブルーチンとした多項式時間解法を与えた.

一般因子問題の定式化

min. $\sum_{v \in V} \delta_F(v)$ on $F \subseteq E$
$(\delta_F(v) \equiv \min_{x \in H_v} |d_F(v) - x|)$
ここで $d_F(v)$ は v に接続する F の枝の本数.

また一般因子問題の応用例として, グラフ上の枝と指定された三角形の中から, 互いに素な枝によってなるべく多くの頂点を被覆する問題 (三角形-枝パッキング問題) の, 一般因子問題への帰着が考案されている. 本章では一般因子問題の多項式時間アルゴリズムの全容を説明するとともに, 三角形-枝パッキング問題における本研究の提案手法を述べるための諸定理を導いた.

4　一般因子問題とマトロイド

これまでに述べた問題 (マッチング問題, 三角形-枝パッキング問題, 一般因子問題) は全てアルゴリズムの終了性という形で何らかの単調的な構造を持ち, それらの性質はマトロイドと呼ばれる離散構造と密接に関係している. 本章では次の 3 つの定理同士の

関係を整理し, これらの問題を統一的に理解する上でマトロイドという観点が有用であることを導いた.

定理 1. グラフ $G = (V, E)$ に対し V の部分集合族 $\mathcal{M} \subseteq 2^V$ を「$W \in \mathcal{M} \Leftrightarrow W$ を被覆する G のマッチングが存在する」として定義する. このとき $(V, \mathcal{M})$ はマトロイドである.

定理 2. (Cornuéjols [2]) グラフ $G = (V, E)$ に対し V の部分集合族 $\mathcal{P}$ を「$W \in \mathcal{P} \Leftrightarrow W$ を被覆する G の三角形-枝パッキングが存在する」として定義する. このとき $(V, \mathcal{P})$ はマトロイドである.

定理 3. (Szabó [4]) 各制約 H_v が 1 を許し 0 を許さないものと仮定し, 大きさ 2 以上の穴を持たない一般因子問題をグラフ $G = (V, E)$ 上で考える. V の部分集合族 $\mathcal{Q} \subseteq 2^V$ を「$W \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow W$ で制約 H_v, さらに V 全体で制約 $H_v \cup \{0\}$ をみたす G の部分グラフが存在する」として定義する. このとき $(V, \mathcal{Q})$ はマトロイドである.

さらにこれまでの一般因子問題及びマトロイドについての議論の帰結として, 頂点重みつきの場合も含めた最大三角形-枝パッキングを増加道探索から直接求める方法を提案した. 各解の更新は具体的には以下のように記述される.

ケース 1: 被覆に用いる三角形は変化させずにマッチングとしての増加道を求め, 更新によって被覆される頂点が 2 点増加する.

ケース 2: 被覆に用いられていた三角形 T を除去し, その 3 頂点を端点として含む 2 本の増加道を見つける. 更新によって被覆される頂点が 1 点増加する.

ケース 3: 被覆に用いられていなかった三角形 T を加えて, T 内の頂点を被覆していた枝を全て除去する. 除去によって被覆されなくなった頂点を全て覆うための増加道を見つける. 更新によって被覆される頂点が 1 点増加する.

5 数値実験

本章では Edmonds のアルゴリズムを通して三角形-枝パッキング問題の提案手法を実装し, その評価を行った. 五角形 $G_1, ..., G_k$ にパラメータによって内部枝を追加し, さらに連結補間を施したランダムグラフに対する計算時間を以下に示す. 計算機性能は「CPU: Pentium M 1.70GHz, メモリ: 512MB」とした.

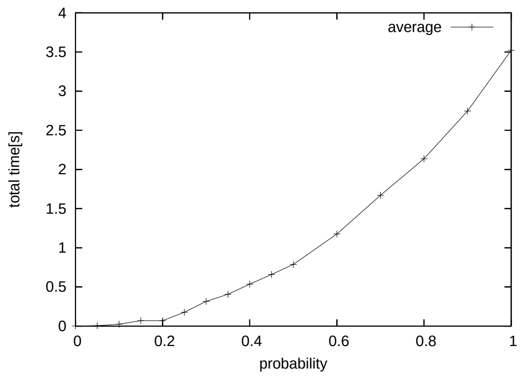

図 1. 横軸:枝の生成確率 縦軸:全体計算時間 [s] n=200, 100 回平均

6 おわりに

本研究ではマッチング問題とその拡張を統一的に理解する枠組みとしてマトロイドを位置づけ, また三角形-枝パッキング問題を一般因子問題の解法とマトロイド性を利用する形で扱い, 増加道探索を基調としたアルゴリズムを提案した. また提案手法を実装, 評価した. 今後の課題としては, 今回扱った問題をマトロイド交叉問題や重み付きマッチング問題の持つ離散構造と関連付けることが挙げられる.

参考文献

[1] G. Cornuéjols, General factors of graphs, J. Combinatorial Theory B 45, pp. 185–198, 1988.

[2] G. Cornuéjols, D. Hartvigsen and W. Pulleyblank, Packing subgraphs in a graph, Operations Research Letters 1, pp. 139–143, 1982.

[3] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, Canadian Journal of Mathematics 17, pp. 449–467, 1965.

[4] J. Szabó, A note on degree prescribed factor problem, EGRES Technical Reports, December, 2004.