

# Multi-game Dynamics in Finite Populations

## (有限集団におけるマルチゲームダイナミクス)

66214 秦 嘉芸  
指導教員 鈴木秀幸 准教授

2008年2月4日

### 1 背景と目的

種の起源と進化を解明するのはライフサイエンスの重要なテーマの一つである。個体間の相互作用をゲームとして捉え、研究するのが進化ゲーム理論である。

歴史的に進化ゲームの研究は過去何十年にわたって、生物集団の個体数が無限であると仮定してきた。レプリケータ方程式と呼ばれる微分方程式モデルを用いて、決定論的に近似した研究が行われてきた。しかし最近、集団の有限性による影響に関する研究が注目を集めている。ここでは、birth-death プロセスを確率過程として捉えたモデルが使われている。その中で頻度依存 Moran Process が最も良く用いられている [1]。

ところが、それらほとんどの研究では集団間の1つの相互作用のみに注目している。つまり、集団は他の相互作用を持たない、もしくは他の相互作用があるとしても、注目する相互作用のダイナミクスに影響を及ぼさないと仮定をしている。しかしながら、自然の世界ではこのような仮定は必ずしも成り立たないと考えられる。

そこで、本研究では有限集団において、ある1つの相互作用によるゲームのダイナミクスに、他の相互作用が影響を及ぼすかどうかについて検証を行う。

### 2 問題設定

ある生態系を考える。この生態系にいる兎は最初白兎だけであるとしよう。ある日一匹の白兎が突然変異によって黒兎になり、そして、最後に白兎が絶滅して全てが黒兎になったとしよう。本研究ではこのような白兎集団に黒兎が侵入して定着する過程に注目する。

この生態系の中には他種の動物ももちろん存在しているので、その1つとして狐集団を考える。狐にとって、兎は白であれ黒であれ、どちらも区別しないと仮定しよう。つまり、狐は白兎とも黒兎ともまったく同じ相互作用を持つとする。また、その相互作用により、兎集団と狐集団の個体数はそれぞれほぼ一定に保たれるとする。すると、黒兎による侵入過程を考える時に、狐集団による影響がない

ものと考え、無視して解析するのが自然な方法であろう。これが今までの進化ゲームによる考え方である。

しかし、兎と狐の間の相互作用を本当に無視していいのだろうか? 本研究では、この相互作用を無視する場合をシングルゲーム、考慮に入れる場合をマルチゲームとし、それぞれにおけるゲームのダイナミクスを比較することによって、この問題を検証する。

### 3 有限集団におけるゲームダイナミクス

#### 3.1 Moran Process

本研究では、頻度依存 Moran Process を用いてゲームのダイナミクスをモデル化する。Moran Process を簡単に説明すると、図1のような3つのステップによって定められる。

- (1) 複製: 種の平均利得に比例する確率で個体が1つ選ばれ、その個体が複製される。
- (2) 死亡: 完全にランダムに個体が1つ選ばれ、その個体が死亡する。
- (3) 置換: 複製されて増えた個体が、死亡した個体の代わりに集団に加える。

この3つのステップで1回のプロセスが終わり、集団の総個体数は変わらない。このプロセスを繰り返して行うことで、ゲームが進んでいく。

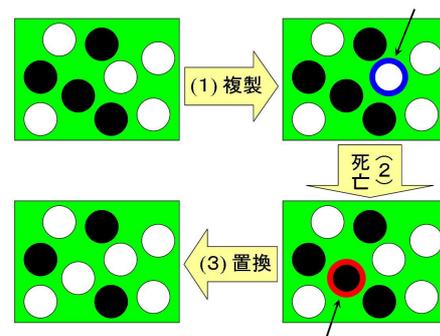


図1 Moran Process

### 3.2 モデル

集団に黒兎が1匹しかいない初期状態からスタートし、最終的に兎集団にいる兎が全部黒になる確率を黒兎の定着確率と定義し、かかる時間を定着時間とする。本研究ではこの2つの視点からゲームのダイナミクスを研究する。

ゲームはMoran Processに従って進んでいくため、種の個体数の変動はマルコフ過程で表される。個体の総数が $M$ と仮定すると、このマルコフ過程を調べることで、定着確率を求めた。これを中立な種の定着確率と比較した時の差の大小により、侵入者は進化的に有利か不利か判定できる。

また定着時間については、定着することを前提とした条件付確率を計算して、定着するまでにかかった時間の期待値をもとめた。

モデルには、主要なパラメータが4つある。パラメータ $p, q$ は、種の性質を決めるパラメータであり、それぞれ兎間のゲームの不安定平衡点 $(p, 1-p)$ および兎狐間のゲームの安定平衡点 $(q, 1-q)$ の位置を定める。また、パラメータ $w_1, w_2$ は、それぞれのゲームがプレイヤーの利得に及ぼす影響の大きさを定める。

### 4 解析結果

本研究の目的は、有限集団におけるシングルゲームとマルチゲームのダイナミクスに違いがあるかどうかを検証することである。そこで、定着確率と定着時間に注目した。定着確率において、シングルゲームで成り立っていた「 $\frac{1}{3}$ 法則」が、マルチゲームでは成り立たないことが分かった(図1)。侵入種が進化的に有利であるためには、シングルゲームの場合と比べて、より強い種が必要とされる。

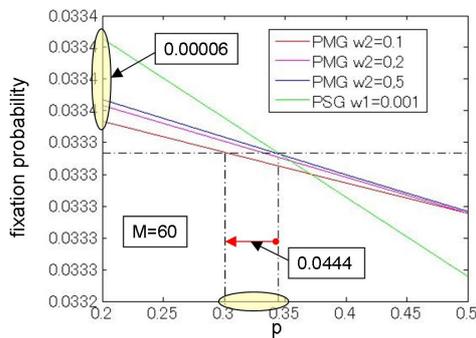


図2 定着確率における「 $\frac{1}{3}$ 法則」からのずれ

一方、定着時間に関してもシングルゲームとマルチゲームで違いが見られた。特に、他種プレイヤー(狐)が弱くなるほど、マルチとシングルとの比 $\frac{T_{MG}}{T_{SG}}$ が大きくなる傾向があると分かった。その機構を解明するため、数理解析を行った。個体の総数 $N \rightarrow \infty, w_1 \rightarrow 0, w_2 \gg 0$ の仮定の

下、ランジュバン方程式を用いて次のような近似式を求めた。

$$\frac{T_{MG}}{T_{SG}} \approx \frac{1}{q} - \frac{1-q}{2q\sqrt{q}} \log \left( \frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}} \right) < 1. \quad (1)$$

定着時間の計算値と近似解析値を図3に示す。

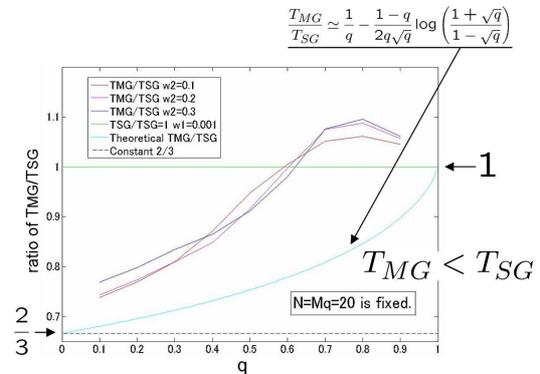


図3 定着時間の計算値と近似解析値

### 5 今後の課題

本研究では、マルチゲームとして最もシンプルと思われるシチュエーションを考えた。有限集団のダイナミクスをモデル化し、定着確率と定着時間の2つの視点から考察した。定着時間についてはランジュバン方程式により解析的な近似式を求めたが、定着確率についての解析は今後の課題となる。

また生物の種類について、1つの集団にいる個体の種類を増やした場合も興味深い。例えば、狐にも白狐と黒狐がある場合である。さらに、集団の種類を増やし、兎と狐以外に狼、羊や猫などいる状況も考慮する。

一方、狐にとって白兎と黒兎が違い、相互作用が異なる場合はどうなるかについても今後考えたい。さらに、今まで考慮した兎間のゲームは人参をめぐるゲームだけだったとすれば、もう1つの例えば白菜をめぐるゲームが同時に兎間で行われている場合はかなり興味深い。これはマルチゲームの基本的な課題でもある。

相互作用により集団の状況が変わっていく現象は、生物の世界だけではなく、例えば社会現象や経済活動などにおいても似たような行動が考えられる。そのため、マルチゲームを考慮した進化ゲームの研究によって、これらの現象においても新たな発見が生み出される可能性がある。

### 参考文献

[1] Nowak, M. A., Sasaki, A., Taylor, C., Fudenberg, D., Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations, *Nature* **428**, 646-650 (2004).