非対称正規分布族のフィッシャー計量と漸近挙動

渡辺 唯一
指導教員： 竹村 彰通 教授

2008 年 2 月 5 日

概要

本論文では非対称正規分布のフィッシャー計量から読み取れる漸近的な性質を導出する．そして，最尤法を行うときの問題点に触れ，幾何的に意味のある再パラメータ化を提案する．また，非対称正規分布を拡張した多変量の分布に関してもフィッシャー計量と 3 次のキュムラントを中心に議論する．

1　非対称正規分布とその性質

非対称正規分布は Azzalini(1985) が提唱した正規分布を含む確率分布である．形状パラメータにより正規分布以上に柔軟なデータの当てはめができるだけではなく，正規分布と類似した性質を持つため解析的に扱いやすい確率分布として近年注目されている．

一変量の非対称正規分布の密度関数を次の式で定義する．ただし，ξ は位置パラメータ，σ は尺度パラメータ，$\lambda \in \mathbb{R}$ は「ひずみ」を表現する形状パラメータ，$\phi(x)$ は標準正規分布の密度関数，$\Phi(x)$ は標準正規分布の分布関数を表すとする．

$$f(y;\xi,\sigma,\lambda) = \frac{2}{\sigma}\phi\Big(\frac{y-\xi}{\sigma}\Big)\Phi\Big(\lambda\frac{y-\xi}{\sigma}\Big)$$

確率分布の特徴を見極めたい場合にはフィッシャー情報行列の形をみることが有用である．実際に非対称正規分布のフィッシャー情報行列を計算すると，$\lambda \to 0$，$\lambda \to \infty$ 付近の分布の挙動がわかる．特に，$\lambda \to 0$ としたときはフィッシャー情報行列が特異行列になる．このことは最尤法による未知パラメータの推定が正確にできなくなることを示唆する．

2　分布族の長さと漸近挙動

λ についてフィッシャー計量ではかったときの分布族の長さを議論する．また，$\lambda \to 0$，$\lambda \to \infty$ におけるフィッシャー情報行列の振る舞いを述べる．簡単のため，$\xi = 0$，$\sigma = 1$ の場合を扱う．以下の 2 つの定理は事前分布をジェフリーズの事前分布とした場合の分布の特徴である．これらはフィッシャー計量ではかった分布族の長さに対応する．

定理 2.1 $\lambda = -\infty$ から $\lambda = \infty$ までの長さは有限であり，ξ，σ を固定したもとでジェフリーズの事前分布の全積分は有限になる：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{I(1,0,\lambda)_{33}}\mathrm{d}\lambda < \infty$$

定理 2.2 ξ，λ を $-\infty$ から ∞, σ を 0 から ∞ まで動かしたときジェフリーズの事前分布の全積分は無限になる：

$$\iiint \sqrt{\det I(\xi,\sigma,\lambda)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\lambda = \infty$$

次に $\lambda \to 0$，$\lambda \to \infty$ 付近の挙動に関する次の 2 つの定理を述べる．この定理から各パラメータの挙動と収束速度がわかる．

定理 2.3 フィッシャー行列の各要素について $\lambda \to 0$ としたときの漸近展開を以下に示す：

$$I(0,1,\lambda)_{11} = 1 + O(\lambda^2),\ I(0,1,\lambda)_{12} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda + O(\lambda^2)$$

$$I(0,1,\lambda)_{13} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O(\lambda^2),\ I(0,1,\lambda)_{22} = 2 + O(\lambda^2)$$

$$I(0,1,\lambda)_{23} = -\frac{2}{\pi}\lambda + O(\lambda^2),\ I(0,1,\lambda)_{33} = \frac{2}{\pi} + O(\lambda^2)$$

となる．

定理 2.4 フィッシャー行列の各要素について $\lambda \to \infty$ としたときの漸近展開を以下に示す：

$$\begin{aligned} &I(0,1,\lambda)_{11} = O(\lambda), \quad I(0,1,\lambda)_{12} = O(1) \\ &I(0,1,\lambda)_{13} = O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big), \quad I(0,1,\lambda)_{22} = 2 + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \\ &I(0,1,\lambda)_{23} = O\Big(\frac{1}{\lambda^2}\Big), \quad I(0,1,\lambda)_{33} = O\Big(\frac{1}{\lambda^3}\Big) \end{aligned}$$

3　パラメータ変換方法の提案

非対称正規分布のパラメータ ξ，σ，λ を解析のしやすいパラメータに置き換えることを目的とする．未知のパラ

メータをデータから推定するときに，最尤法では対数尤度関数が最大になるようにパラメータを推定する．しかし，$\lambda \to 0$ のときの非対称正規分布のようにフィッシャー情報量が特異行列になってしまう場合にはパラメータ間の区別がつきにくくなり正確な推定が行えなくなる．そのため，本研究では $\lambda \to 0$ 付近でも完全にパラメータが直交するようにパラメータのとり方を工夫する．

各パラメータのスコアベクトルが $\lambda = 0$ 付近でも直交するような再パラメータ化として次の定理を紹介する．

定理 3.1 パラメータ変換前後のパラメータである (ξ, σ, λ) と $(\bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\gamma})$ の関係を次のようにすると，各パラメータ $\bar{\xi}$，$\bar{\sigma}$，$\bar{\gamma}$ は互いに直交する．

$$\lambda = \sqrt{\pi}\Big(\frac{\sqrt{3}\bar{\gamma}}{4-\pi}\Big)^{1/3}$$

$$\sigma = \bar{\sigma}\Big(1 + \Big(\frac{\sqrt{3}\bar{\gamma}}{4-\pi}\Big)^{2/3}\Big)$$

$$\xi = \bar{\xi} - \frac{\bar{\sigma}3^{1/6}\gamma^{1/3}}{5\sqrt{2}(4-\pi)^{5/3}}\Big(10(4-\pi)^{4/3} + 3^{2/3}(4-3\pi)\gamma^{4/3} + 5 \cdot 3^{1/3}(2-\pi)((4-\pi)\gamma)^{2/3}\Big)$$

実際に $\lambda \to 0$ のもとで $I(\bar{\xi}, \bar{\sigma}, \bar{\gamma})$ を計算すると非特異行列になっており，問題は解消されたことがわかる．

4 一般化非対称球面分布と 3 次のキュムラント

一変量の非対称正規分布は次の式で定義される k 変量一般化非対称球面分布に拡張されている．ただし，f_k は k 次元球面分布の密度関数，Q は任意の $z \in \mathbb{R}^k$ に関して $Q(z) > 0$，$Q(-z) = 1 - Q(z)$ を満たすひずみを表現する関数とする．

$$f(z|Q) = 2f_k(z)Q(z), \quad z \in \mathbb{R}^k$$

一般化非対称球面分布の 3 次のキュムラントに着目する．通常，多変量解析において変数間の交互作用を検出する場合には解析上の利点から多変量正規分布の仮定をおく．しかし，多変量正規分布の 3 次のキュムラントが存在しないため，多変量正規分布の仮定では 3 変数以上の交互作用を検出することができない．本論文では 3 次キュムラントが存在する一般化非対称球面分布の例をあげる．

一般化非対称球面分布として $g(z)$ を定義する．ただし，$z = (z_1, z_2, z_3)'$，$\phi_3(z)$ を 3 変量標準正規分布の密度関数，θ はひずみを表現する形状パラメータとする．

$$g(z) = 2\phi_3(z)\Big(\frac{1}{2} + \theta \sin z_1 \sin z_2 \sin z_3\Big)$$

この確率分布の 3 次のキュムラントを求めると次のようになる．

定理 4.1 一般化非対称球面分布 $g(z)$ の 3 次のキュムラント $cu(\theta)$ は，

$$cu(\theta) = 2e^{-2/3}\theta$$

となる．

ここであげた一般化非対称球面分布は多変量正規分布の仮定ではできなかった 3 変量の交互作用を表現することが可能である．

5 結論と今後の課題

本研究では，形状パラメータに着目して非対称正規分布のフィッシャー情報行列の漸近的な挙動を調べた．収束の速度や非対称正規分布が半正規分布や正規分布になる付近でどのような振る舞いをするのかを確認した．また，非対称正規分布のフィッシャー計量ではかった分布族の距離が有限になることを示した．

最尤法による未知パラメータの推定を行う際のフィッシャー情報量行列の形から生じる問題点に注目した．従来の方法より直感的に分かりやすい，パラメータを直交化するという方法でパラメータ変換を行い問題を解決した．今後の課題としては多変量への拡張があげられる．提案した方法では微分方程式を解くといった解析的に難しい手順を踏まなければならないため，簡単に多変量に拡張することができないと思われる．

多変量に拡張した一般化された非対称球面分布の 3 次のキュムラントを求めた．これは 3 次以上のキュムラントが存在しない多変量正規分布とは大きく異なる性質である．そのため，非対称球面分布族が多変量正規分布以上の交互作用項の検出に利用できる可能性があることを示唆している．実際に交互作用項を検出する具体的な手順やプログラムの作成が今後の課題といえる．

参考文献

[1] Azzalini, A. (1999). Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution.*J. R. Statist. Soc. B*, 61, 579-601.

[2] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scand. J. Statist*, 12, 171-178.

[3] Sei, T. (2006). Parametric modeling based on the gradient maps of convex functions, Technical Report METR2006-51, Department of Mathematical Engineering and Information Physics, The University of Tokyo.