住宅ローン債権担保証券に対する評価法の効率化:
強度モデルによるアプローチ

66220　数理第二研究室　西辻泰典　NISHITSUJI Yasunori

1.　はじめに

住宅ローン債権担保証券（Residential Mortgage-Backed Securities: RMBS）とは，複数の住宅ローン債権から支払われる元利金に基づいてキャッシュフローが発生する債券である．一般に，住宅ローン債務者は契約時に定められた一回当たりの元利金支払額以上の返済（部分償還）や，残存元本の完済（一括償還）の権利（期限前償還権）を有しているため，将来時点の残存元本額は不確定であり，それに伴って RMBS 保有者の受け取るキャッシュフローも不確定になる．このように，RMBS は一般的な債券と同様に金利リスクを有するほか，期限前償還リスクを有しており，RMBS の価格評価では債務者の期限償還行動を考慮することが必要となる．

債務者は金利低下時に有利な借換が可能となるため，金利が低下するにつれ期限前償還は多くなるという傾向がある．それゆえ，金利と期限前償還は独立ではなく，複雑な金利モデルと金利との依存性を充分に考慮した期限前償還モデルのもとでは，RMBS の価格評価は困難になる．解析解が求まらない場合，モンテカルロ法やツリー法などの数値計算的負荷の大きい手法が使われることが多いが，大規模なポートフォリオの評価や様々なリスク指標の計算には，短時間にある程度の精度を持つ解を近似解析的に求めることが有効であると考えられる．

先行研究として Kolbe and Zagst [3] では金利に Cox-Ingersoll-Ross（CIR）モデルを用い，金利と期限前償還率の関係を折れ線関数でモデル化して，RMBS の近似解析解を導出している．CIR モデルは初期の金利モデルの代表例であるが，現在では CIR モデルを含み，非連続的な変動まで考慮した Affine Jump Diffusion（AJD）モデルが Duffie, Pan, and Singleton [2] などにより提案されている．本研究では，期限前償還モデルを折れ線関数により表現し，金利モデルは AJD とした．AJD モデルでは，一般に将来時点における金利の確率密度関数は求まらないが，Collin-Dufresne and Goldstein [1] は，このような場合に確率密度関数の級数近似を用いて金融商品の価格評価を行っている．本研究では，級数近似の 1 つである Gram-Charlier 展開を利用して効率的に RMBS の近似価格を評価する手法を提案する．

2.　RMBS の設定

RMBS の裏付となる各住宅ローン債権の契約条件は満期 T 年，1 年当りの元利金支払回数 m，利率 c で，全体の初期残存元本額は G_0 とする．元利金支払時点は $t_i := i/m \ (i = 1, 2, \ldots, mT)$ とする．期限前償還がない場合の時点 t_i における予定残存元本額 G_i は，

$$G_i = G_0 \frac{(1 + c/m)^{mT} - (1 + c/m)^{mt_i}}{(1 + c/m)^{mT} - 1}$$

である．期限前償還を考慮した残存元本額を G_i^* として，生存率 S_i および期限前償還率 H_i をそれぞれ $S_i := G_i^*/G_i$，$H_i := (S_{i-1} - S_i)/S_{i-1}$ で定義する．このとき，RMBS のキャッシュフローは $CF_i^* = (1 + c/m)\, G_{i-1} S_{i-1} - G_i S_i$ で与えられる．

時点 t_i において，債務者が借換の指標とするのはその時点の住宅ローン金利であるが，これを τ 年利回り $R_i(\tau)$ で代替し，期限前償還モデルは以下のような折れ線関数型とする：

$$\begin{aligned} H_i =& A\,(c - R_i(\tau))\, \mathbf{1}_{\{0 \le c - R_i(\tau) < B/A\}} \\ &+ B \mathbf{1}_{\{B/A \le c - R_i(\tau)\}}. \end{aligned}$$

3.　AJD モデル

瞬間的な金利（スポット・レート）r はリスク中立測度のもとで以下の確率微分方程式に従うとする：

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(r)\mathrm{d}t + \sigma(r)\mathrm{d}W(t) + \mathrm{d}Z(t).$$

ここで，$W(t)$ は標準ブラウン運動，$Z(t)$ は $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(\mathrm{d}y)\lambda(r)\mathrm{d}s$ を compensator に持つジャンプ過程である．また，$k_0, k_1, h_0, h_1, l_0, l_1$ を定数として $\mu(r) = k_0 + k_1 \cdot r, \sigma(r) = h_0 + h_1 \cdot r, \lambda(r) = l_0 + l_1 \cdot r$ である．

B_i を時点 t_i における預金勘定（savings account）$\exp\left(\int_0^{t_i} r(s)\mathrm{d}s\right)$ として，$r(t_j)$ の（相対）l 次モーメントを $\mathcal{M}_l := \mathrm{E}\left[r^l(t_j)/B_j\right]$ で定義する．Pan [4] は積率母関数が既知の場合に，モーメントの効率的な計算法を導出しているが，積率母関数が未知の場合におい

ても，常微分方程式系を解くことでモーメントが求まることを示す次の定理が成り立つ．

定理 1 関数 α, β および γ_q $(q=0,1,\ldots,l)$ が次の常微分方程式系の解とする：

$$\begin{aligned}\alpha' &= k_0\beta + \frac{1}{2}h_0\beta^2 + l_0\left(\xi(\beta)-1\right),\\ \beta' &= -1 + k_1\beta + \frac{1}{2}h_1\beta^2 + l_1\left(\xi(\beta)-1\right),\\ \gamma_q' &= I_q\gamma_q + J_{q+1}\gamma_{q+1} + K_{q+2}\gamma_{q+2}\\ &\quad + (1-\delta_{ql})l_0L_q + (1-\delta_{q0})l_1L_{q-1}.\end{aligned}$$

初期条件は $\alpha(0)=0$，$\beta(0)=0$，$\gamma_q(0)=0$ $(q=0,1,\ldots,l-1)$，$\gamma_l(0)=1$ である．ここで，$\xi(\beta) := \int_{\mathbb{R}} e^{\beta y}K(\mathrm{d}y)$ である．また，I, J, K, L は l 以下の添字に対して，

$$\begin{aligned}&I_q := q(k_1+h_1\beta),\ K_{q+2} := \frac{(q+2)(q+1)}{2}h_0,\\ &J_{q+1} := (q+1)\left(k_0+h_0\beta+\frac{q}{2}h_1\right),\\ &L_q := \sum_{p=q+1}^{l}\gamma_p\binom{p}{q}\xi^{(p-q)}(\beta)\end{aligned}$$

であり，$l+1$ 以上の添字に対しては 0 とする．

このとき，$\mathcal{M}_l = e^{\alpha(t_j)+\beta(t_j)\cdot r(0)}\sum_{q=0}^{l}\gamma_q(t_j)r^q(0)$ が成り立つ．

4. Gram-Charlier 展開

一般には，AJD モデルに従うスポット・レートの確率密度関数の閉形表現は求まらないため，本研究では Gram-Charlier 展開による近似を適用する．$r(t_j)$ の t_j フォワード中立測度のもとでの確率密度関数 f_j の Gram-Charlier 展開は以下のように与えられる：

$$f_j(x) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{q_l^j}{\sqrt{c_2}}\mathfrak{h}_l\left(\frac{x-c_1^j}{\sqrt{c_2^j}}\right)\phi\left(\frac{x-c_1^j}{\sqrt{c_2^j}}\right).$$

ここで，c_l^j は t_j フォワード中立測度のもとでの $r(t_j)$ の l 次キュムラント，q_l^j は l 次以下のキュムラントから定まる定数，$\mathfrak{h}_l$ は l 次エルミート多項式，ϕ は標準正規分布の確率密度関数である．

5. RMBS の価格評価

RMBS の無裁定価格 V は $V=\sum_{i=1}^{mT}\mathrm{E}\left[CF_i^*/B_i\right]$ で与えられる．本研究の主要な結果として，価格 V に対する近似的閉形表現が以下のように得られる：

$$\begin{aligned}V = \sum_{i=1}^{mT}\Big[&\left\{(1+c/m)\,G_{i-1}-G_i\right\}\left(P_i-\sum_{j=1}^{i-1}\mathcal{H}_j^i\right)\\ &+G_i\mathcal{H}_i^i\Big]+O\left(||H||^2\right).\end{aligned}$$

また，異時点間の期限前償還率の依存性が小さいときに有効な近似式として以下を得る：

$$\begin{aligned}V \approx \sum_{i=1}^{mT}\Big[&\left\{(1+c/m)\,G_{i-1}-G_i\left(1-\mathcal{H}_i^i/P_i\right)\right\}\\ &\times P_i\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\mathcal{H}_j^i/P_i\right)\Big].\end{aligned}$$

ここで，P_i は満期 t_i の割引債価格 $\mathrm{E}\left[1/B_i\right]$ である．また，$\mathcal{H}_j^i := \mathrm{E}\left[H_j/B_i\right]$ であり，これは Gram-Charlier 展開を利用して次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j^i =&\ P_j e^{\alpha(\Delta_{ij})+c_1^j\beta(\Delta_{ij})+\frac{c_2^j}{2}\beta^2(\Delta_{ij})}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l}q_l^j\binom{l}{n}\\ &\times\left(\sqrt{c_2^j}\beta(\Delta_{ij})\right)^{l-n}\left\{B\mathcal{I}_n^{D_1}+A\frac{\sqrt{c_2^j}\beta(\tau)}{\tau}\mathcal{J}_n^{D_2}\right.\\ &\left.+A\left(\frac{\alpha(\tau)+\beta(\tau)(c_1^j+c_2^j\beta(\Delta_{ij}))}{\tau}+c\right)\mathcal{I}_n^{D_2}\right\}.\end{aligned}$$

ここで，$\Delta_{ij} := t_i - t_j$，$\mathcal{I}_n^D := \int_D \mathfrak{h}_n(z)\phi(z)\mathrm{d}z$，$\mathcal{J}_n^D := \int_D z\mathfrak{h}_n(z)\phi(z)\mathrm{d}z$ である．積分領域 $D=D_1, D_2$ は折れ線関数のパラメータ A, B および $c^j, \alpha, \beta, \Delta_{ij}, \tau$ から定まる．

発表では，提案手法による数値計算結果の精度および計算時間の既存手法との比較を報告する．

参考文献

[1] Collin-Dufresne, P., and R. S. Goldstein: Pricing Swaptions within an Affine Framework. *Journal of Derivatives 10*, 1-18, 2002.

[2] Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton: Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. *Econometrica 68*, 1343-1376, 2000.

[3] Kolbe, A., and R. Zagst: Valuation of Mortgage-Backed Securities and Mortgage Derivatives: A Closed-Form Approximation. Working Paper, 2007.

[4] Pan, J.: The Jump-Risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-Series Study. *Journal of Financial Economics 63*, 3-50, 2002.