日米の株価指数の変動における相関に関する研究

桜井　悠司
指導教員　藤井　眞理子教授

2007 年 2 月 5 日

概 要

本研究は, 日本と米国の株式市場の変動の相関を, レンジを用いて分析する. レンジとは, ある日の株価の最大値と最小値の対数の差であり, 変動の定量化に適している. 1991 年から 2006 年の TOPIX と S&P500 の日次データを利用する.
第一の課題は, 条件付き相関係数で見た際のレンジの相関の非対称性をモデル化することである. 具体的には, レンジがともに大きいときに, レンジの相関が高い. 複数のモデルを当てはめた結果, 概して, マルコフ・レジーム・スイッチングを導入した確率的ボラティリティ・モデルが, この非対称性を最も良く記述することを見出した.
第二の課題は, 両市場の互いへの影響の度合いにおける非対称性について分析することである. GARCH 型モデルを利用して分析した結果, 米国の株式市場のリターンが負であった日の翌日に, 日本の株式市場のボラティリティは大きくなるのに対し, 逆の効果は見出せなかった.

1　背景と目的

各国の株式市場の相関に関する過去の研究はリターンの相関を分析したものが多いが, 変動の相関を分析した研究は少ない. そこで, 本研究は変動の相関に焦点を当て, 新たな結果を得ることを目的とする.

2　レンジの相関の非対称性

ある取引日の株価の最大値と最小値をそれぞれ, $S_{\max}$ と $S_{\min}$ とすると, レンジ D は以下で定義される.

$$D = \log(S_{\max}) - \log(S_{\min}) \tag{1}$$

株価が幾何ブラウン運動に従うと仮定すると, 対数レンジ $\log D$ は, ボラティリティを σ で表すと,

$$\log D \sim N(0.43 + \log\sigma, 0.29^2) \tag{2}$$

という正規分布に近似的に従う[1](Alizadeh et al.[2002]).

平均 0, 標準偏差 1 になるように基準化した対数レンジを $\log\tilde{D}$ と表すと, レンジの条件付き相関係数 $\bar{\rho}(\theta)$ は $\theta \geq 0$ で,

$$\mathrm{corr}(\log\tilde{D}_{J,t}, \log\tilde{D}_{U,t} | \log\tilde{D}_{J,t} > \theta, \log\tilde{D}_{U,t} > \theta) \tag{3}$$

と定義される. ここで, J と U は各々, 日本と米国の株価指数を指し示す. $\theta \leq 0$ の場合は, 条件の符号が逆になる. 対数レンジが正規分布に従うなら, 図 1 に示されているように, 条件付き相関係数 $\bar{\rho}(\theta)$ は $\theta = 0$ を軸に対称になる.

TOPIX と S&P500 を対象にレンジの条件付き相関係数を適用した. データの期間は, 1991 年 4 月 1 日から 2006 年 3 月 31 日で, 5 年ごとに 3 つに分けている. 条件付き相関係数をプロットした図 2 を見ると, 1991 年 4 月から 1996 年 3 月と 2001 年 4 月から 2006 年 3 月において, 条件付き相関係数は $\theta > 0$ で高い. これは, 日本と米国の株式市場の変動がともに大きいときには, その変動の相関が高いことを意味している[2]. つまり, レンジの相関には非対称性がある.

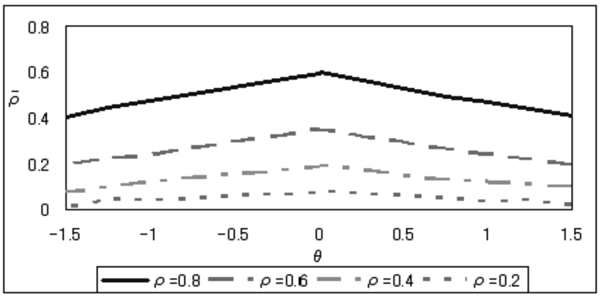

図 1. 正規分布に従う場合の条件付き相関係数

0.8, 0.6, 0.4, 0.2 とあるのは, 正規分布の相関係数 ρ がそれぞれ 0.8, 0.6, 0.4, 0.2 の場合についてプロットしたものである.

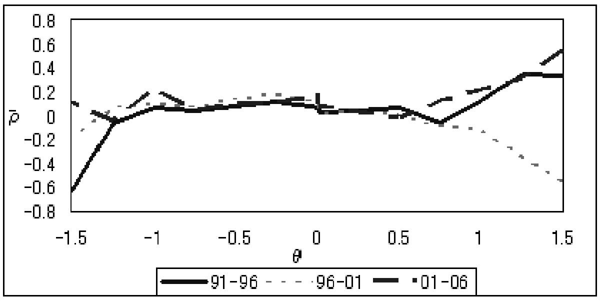

図 2. レンジの条件付き相関係数

3　相関の非対称性を記述するモデル

ボラティリティσ の挙動をモデル化することで, レンジの相関の非対称性を再現することを試みる. 候補にしたモデルは 3 つであり, SV モデル, SV-MRS モデル, SV-Mixture モデルである.

第一の SV モデルは標準的な確率的ボラティリティ・モデルを 2 変数に拡張したものである. SV モデルは以下のように表される.

$$\begin{pmatrix} \log\sigma_{J,t} - \log\bar{\sigma_J} \\ \log\sigma_{U,t} - \log\bar{\sigma_U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_J(\log\sigma_{J,t-1} - \log\bar{\sigma_J}) \\ \rho_U(\log\sigma_{U,t-1} - \log\bar{\sigma_U}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{J,t} \\ \epsilon_{U,t} \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \log D_{J,t} \\ \log D_{U,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log\sigma_{J,t} \\ \log\sigma_{U,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log D^*_{J,t} \\ \log D^*_{U,t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$\epsilon_t' = (\epsilon_{J,t}, \epsilon_{U,t})'$ はシステム・ノイズであり, ともに平均 0 の正規分布に従う. $\epsilon_{J,t}$ と $\epsilon_{U,t}$ の標準偏差は, β_J, β_U であり, その相関係数は $r_{\log\sigma}$ である. また, $\log D^{*\prime} = (\log D^*_{J,t}, \log D^*_{U,t})'$ は観測ノイズであり, ともに平均が 0.43,

[1] この性質の結果, 相関の非対称性の分析と確率的ボラティリティ・モデルの推定が容易になる.
[2] ただし, 1996 年 4 月から 2001 年 3 月については, 両市場のレンジが大きいときに, レンジの条件付き相関係数はより低い.

標準偏差が 0.29, 相関係数 0 の正規分布に従う．$\rho_i (i = J, U)$ は平均回帰の速度を決める．

第二の SV-MRS モデルは, SV モデルにおいて, ボラティリティの平均値と, そのショックの相関がレジームによって変化するとしたモデルである．リターンの相関の非対称性を分析した Ang and Chen[2002] の研究でレジーム・スイッチング・モデルが用いられており, レンジの場合にも適用できるのではないかと考えた．

第三の SV-Mixture モデルは, ボラティリティのショックが混合正規分布に従うとしたモデルである．これは, レンジのヒストグラムが混合正規分布に近い形状をしているため, 候補とした．

4 H 統計量によるモデルの評価

N 個の閾値 θ_i を, まとめて $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$ で表記する．データから計算された条件付き相関係数を $\bar{\rho}(\theta_i)$ とし, パラメータ ϕ のもとでモデルから計算された条件付き相関係数を $\bar{\rho}(\theta_i, \phi)$ とすると[3], H 統計量は以下で定義される．

$$H = \left[\sum_{i=1}^{N} w(\theta_i) \cdot (\bar{\rho}(\theta_i, \phi) - \bar{\rho}(\theta_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

重み付けの方法は 2 種類ある．第一に, 等しく重み付けする方法がある．第二に, 閾値 θ_i の条件を満たすデータ数ごとに重み付けする方法がある．H 統計量を重み付けに応じて, それぞれ, H_{equal}, H_{weight} と表す．

H 統計量の小さいモデルは, 実際の条件付き相関係数との当てはまりが良いモデルと考えられる．

H 統計量を示した表 1,2 から, 概して, SV-MRS モデルが, この非対称性を最も良く記述することが分かる．

表 1. 各モデルにおける H 統計量 H_{equal}

モデル/時期	91 年-96 年	96 年-01 年	01 年-06 年
SV	0.2236	0.2020	0.1606
SV-MRS	0.2098	0.2186	0.1591
SV-Mixture	02101	0.1968	0.1891

閾値 θ_i の個数が 14 個あり, $w(\theta_i) = \frac{1}{14}$ で等しく重み付けしている．

表 2. 各モデルにおける H 統計量 H_{weight}

モデル/時期	91 年-96 年	96 年-01 年	01 年-06 年
SV	0.0916	0.0948	0.0878
SV-MRS	0.0675	0.0947	0.1007
SV-Mixture	0.0761	0.1134	0.0996

閾値 θ_i の条件 $(\log \tilde{D} \leqslant \theta_i, \log \tilde{D} \leqslant \theta_i)$ を満たすデータ数ごとに重み付けしている．

5 REGARCH による分析

もう一つの課題は, 両市場の互いへの影響の度合いにおける非対称性を分析することである．具体的には, 米国の株式市場のリターンが日本の株式市場のボラティリティに与える影響の度合いに比して, 逆は小さいと予想される．こうしたボラティリティの伝播をモデル化するには, GARCH 型モデルが適している．時差のため, 両市場の取引時間に時間的重なりがないことを上手く利用して, この予想を検証する．

日本の第 t 取引日の株式市場に影響を与えるのは米国の第 $t-1$ 取引日であるが, 米国の第 t 取引日の株式に影響を与えるのは日本の同じ第 t 取引日であることに注意する．

[3]モデルの条件付き相関係数は, 最尤推定で得たパラメータの下でモデルをシミュレーションし, 2 変数のレンジの人工データを発生させ, そのデータに基づいて計算した．

GARCH 型モデルの 1 つである REGARCH モデルは以下で表される．

$$\begin{aligned}
\log D_{J,t} &\sim N(0.43 + \log \sigma_{J,t}, 0.29^2) && (7)\\
\log D_{U,t} &\sim N(0.43 + \log \sigma_{U,t}, 0.29^2) && (8)\\
\log \sigma_{J,t} &= \log \bar{\sigma_J} + \rho_J (\log \sigma_{J,t-1} - \log \bar{\sigma_J}) \\
&\quad + \beta_{JJ} X^D_{J,t-1} + \delta_{JJ} R_{J,t-1}/\sigma_{J,t-1} \\
&\quad + \beta_{UJ} X^D_{U,t-1} + \delta_{UJ} R_{U,t-1}/\sigma_{U,t-1} && (9)\\
\log \sigma_{U,t} &= \log \bar{\sigma_U} + \rho_U (\log \sigma_{U,t-1} - \log \bar{\sigma_U}) + \beta_{UU} X^D_{U,t-1} \\
&\quad + \delta_{UU} R_{U,t-1}/\sigma_{U,t-1} \\
&\quad + \beta_{JU} X^D_{J,t} + \delta_{JU} R_{J,t}/\sigma_{J,t} && (10)
\end{aligned}$$

ここで, $R_{i,t-1}$ は第 $t-1$ 取引日のリターンであり,

$$X^D_{i,t-1} = (\log D_{i,t-1} - 0.43 - \log \sigma_{i,t-1})/0.29 \tag{11}$$

である．以下では, パラメータの意味を説明する．

まず, ρ_i, $\log \bar{\sigma}_i$ であるが, これは各々の株式市場のボラティリティの平均値とその平均回帰の速度を表している．

また, β_{ij} は, 予期せぬボラティリティの変化が, 次の期のボラティリティに与える影響の程度を示している．例えば, β_{JJ} が大きいと, 日本の株式市場における予期せぬボラティリティは, 次の期の日本の株式市場のボラティリティをより大きくする．

さらに, δ_{ij} は, リターンの変化が, 次の期のボラティリティに与える影響の程度を示している．例えば, δ_{UJ} が負であれば, 米国において株価が上昇したときよりも, 下落したときの方が, 日本の株式市場のボラティリティをより増大させる．

推定した REGARCH モデルのパラメータを表 3 に示す．表 3 で注目してほしいのは, δ_{UJ}, δ_{JU} である．δ_{UJ} は δ_{JJ} に対して, 0.0143/0.0197 と相対的に大きいのに対して, δ_{JU} は δ_{UU} に対して, 0.0010/0.0418 と相対的に非常に小さい．これは, 日本の株式のボラティリティは前日の米国のリターンが負になると大きくなるのに大して, 逆の効果は非常に小さいことを意味している．

表 3. REGARCH モデルのパラメータの推定結果

TOPIX		S&P500	
パラメータ	推定値	パラメータ	推定値
$\log \bar{\sigma_J}$	-4.8748	$\log \bar{\sigma_U}$	-4.7484
ρ_J	0.9828	ρ_U	0.9894
β_{JJ}	0.0361	β_{UU}	0.0254
β_{UJ}	0.0114	β_{JU}	0.0088
δ_{JJ}	-0.0143	δ_{UU}	-0.0418
δ_{UJ}	-0.0197	δ_{JU}	-0.0010

添え字の J と U がそれぞれ, TOPIX と S&P500 を表している．また, $JU(UJ)$ とあるのは, TOPIX(S&P500) から S&P500(TOPIX) への影響を意味する．

6 まとめと今後の展望

本研究は, 日本と米国の株価指数の変動の相関について, TOPIX と S&P500 のレンジを用いて, SV モデルと GARCH 型モデルの特徴を活かして分析を行った． 今後の展望としては, 2 つの方向性が考えられる．1 つは, 分析対象を広げることである．もう 1 つは推定手法の改良が挙げられる．

参考文献

[1] Ang, A. and J. Chen, "Asymmetric Correlations of Equity Portfolios," *Journal of Financial Economics 63*(3), 443-494, 2002.

[2] Alizadeh, S., M. Brandt, and F. G. Diebold, "Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models," *Journal of Finance 57*(3), 1042-1092, 2002.