修士論文審査資料

ハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の近似解法

指導教員　杉原 厚吉 教授，松井 知己 教授
数理情報学専攻　数理第五研究室　岩佐 大

平成 19 年 2 月 5 日

1.　概要

航空会社にとって，ハブ空港を中心としたネットワークを適切に構築することは重要な課題である．Sohn and Park (2000) は，ハブ空港が与えられたとき，非ハブ空港からハブ空港への接続を決定する問題を 2 次整数計画問題として定式化している．ハブ空港数が 3 つ以上のとき，この問題は NP 困難であるが，現在まで精度保証付きの近似解法は知られていなかった．本研究では，このハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題に対する近似解法を提案する．具体的には，ハブ空港数が一般の場合に対して 3-近似解法と 2-近似解法を提案し，ハブ空港数が 3 つの場合に対しては (4/3)-近似解法と (5/4)-近似解法を提案する．

2.　問題の定義および定式化

h 個のハブ空港と n 個の非ハブ空港，および各空港間の輸送量と単位輸送コストが与えられているものとする．非ハブ空港は唯一のハブ空港に接続し，非ハブ空港間の輸送はハブ空港を経由して行われる．また，各ハブ空港間は直行便を持ち，乗り換えは 2 回までとする．本研究では，以上の条件の下で，総輸送コストを最小化するように非ハブ空港のハブ空港への接続を決定する問題を扱う．

h 個のハブ空港の集合を $H := \{1, 2, \dots, h\}$，n 個の非ハブ空港の集合を $N := \{1, 2, \dots, n\}$，空港 i から j への輸送量と単位輸送コストをそれぞれ $w_{ij} (\geq 0)$，$c_{ij} (\geq 0)$ とする．単位輸送コストは，次の条件を満たすものとする．

仮定 2.1　単位輸送コストは，以下の条件を満たす．

(i)　$c_{ii} = 0 \ \ (\forall i \in H \cup N)$.

(ii)　$c_{ij} = c_{ji} \ \ (\forall (i, j) \in (H \times H) \cup (H \times N) \cup (N \times H))$.

(iii)　$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \ \ (\forall (i, j, k) \in H^3)$.　□

いくつかの近似解法においては，次の条件も仮定する．

仮定 2.2　単位輸送コストは，$c_{ij} \leq c_{pi} + c_{pj} \ \ (\forall (p, i, j) \in N \times H^2)$ を満たす．　□

ここで，$\widetilde{N^2} := \{(i, j) \in N^2 \mid i \neq j\}$ と定める．この問題は，線形制約および整数制約の下で 2 次関数を最小化する問題であり，2 次整数計画問題として定式化することができる:

$$
\begin{array}{lll}
\text{QIP:} & \text{min.} & \sum_{(p,q)\in\widetilde{N^2}} w_{pq} \big(\sum_{i\in H} c_{pi} x_{pi} \\
& & \quad + \sum_{i\in H}\sum_{j\in H} c_{ij} x_{pi} x_{qj} + \sum_{j\in H} c_{jq} x_{qj}\big) \\
& \text{s.t.} & \sum_{i\in H} x_{pi} = 1 \qquad (\forall p \in N), \\
& & x_{pi} \in \{0,1\} \qquad (\forall (p,i) \in N \times H).
\end{array}
$$

ただし，変数 x_{pi} は，非ハブ空港 p をハブ空港 i に接続するときに 1 の値をとり，接続しないときに 0 の値をとるものとする．ここで，新たな変数 $y_{piqj} := x_{pi} x_{qj}$ を導入することにより目的関数を線形化し，次に簡単な式変形を行うことにより，以下の混合整数計画問題を導出することができる:

$$
\begin{array}{lll}
\text{MIP:} & \text{min.} & \sum_{(p,q)\in\widetilde{N^2}} w_{pq} \big(\sum_{i\in H} c_{pi} x_{pi} \\
& & \quad + \sum_{i\in H}\sum_{j\in H} c_{ij} y_{piqj} + \sum_{j\in H} c_{jq} x_{qj}\big) \\
& \text{s.t.} & \sum_{i\in H} x_{pi} = 1 \qquad (\forall p \in N), \\
& & \sum_{j\in H} y_{piqj} = x_{pi} \quad (\forall (p,q) \in \widetilde{N^2},\ \forall i \in H), \\
& & \sum_{i\in H} y_{piqj} = x_{qj} \quad (\forall (p,q) \in \widetilde{N^2},\ \forall j \in H), \\
& & x_{pi} \in \{0,1\} \qquad (\forall (p,i) \in N \times H), \\
& & y_{piqj} \geq 0 \qquad (\forall (p,q) \in \widetilde{N^2},\ \forall (i,j) \in H^2).
\end{array}
$$

本稿では以降，MIP の目的関数を $\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}$ により表す．また，MIP の整数制約を連続緩和することにより得られる線形緩和問題を LPR と名付ける．本研究では，線形計画緩和に基づく近似解法を提案し，解法により得られる 2 次整数計画問題の許容解における，目的関数値の上界を理論的に保証する．

3.　ハブ空港数が一般の場合に対する近似解法

本章では，ハブ空港数が一般の場合に対する 3-近似解法と 2-近似解法を提案する．

解法 3.1 (3-近似解法)　各非ハブ空港を，最も単位輸送コストが小さいハブ空港に接続する．

定理 3.2　仮定 2.1 と仮定 2.2 の下で，解法 3.1 は，ハブ空港数が一般の場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の 3-近似解法である．

証明　任意の非ハブ空港のペア $(p, q) \in \widetilde{N^2}$ に着目して近似率の解析を行う．非ハブ空港 p, q に対して，最も単位輸送コストの小さいハブ空港をそれぞれ i', j' とする．また，非ハブ空港 p, q は最適解において，それぞれハブ空港 i^*, j^* に接続するものとする．このとき，$c_{pi'} \leq c_{pi^*}$ と $c_{qj'} \leq c_{qj^*}$ が成り立つ．仮定 2.1 と仮定 2.2 より，非ハブ空港のペア $(p, q) \in \widetilde{N^2}$ に関連する単位輸送コストは以下のように抑えられる：

$$
\begin{array}{ll}
c_{pi'} + c_{i'j'} + c_{qj'} & \\
\quad \leq & c_{pi'} + (c_{i'i^*} + c_{i^*j^*} + c_{j^*j'}) + c_{qj'} \\
\quad \leq & c_{pi'} + (c_{i'p} + c_{pi^*}) + c_{i^*j^*} + (c_{j^*q} + c_{qj'}) + c_{qj'} \\
\quad \leq & 3\,c_{pi^*} + c_{i^*j^*} + 3\,c_{qj^*} \leq 3\,(c_{pi^*} + c_{i^*j^*} + c_{qj^*}).
\end{array}
$$

上の不等式は，$i' = j'$ もしくは $i^* = j^*$ の場合にも成り立つ．ゆえに，題意は満たされる．　■

解法 3.3 (2-近似解法)

1. 線形緩和問題 LPR を解き，最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ を得る．

2. 各非ハブ空港 $p \in N$ を，x^*_{pi} の確率で独立にハブ空港 $i \in H$ に接続する．

補題 3.4 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$ を LPR の 2 つの実行可能解とする．ただし，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x'}$ を仮定する．このとき，仮定 2.1 と仮定 2.2 の下で，$\widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y'} \le \widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x} + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}$ が成り立つ．

定理 3.5 仮定 2.1 と仮定 2.2 の下で，解法 3.3 は，ハブ空港数が一般の場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の 2-近似解法である．

証明 与えられた入力に対して，解法 3.3 を適用することにより得られる近似解を $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ と表す．このとき，$Y_{piqj} = X_{pi}X_{qj}$ が成り立つ．また，解法 3.3 を適用することにより得られる目的関数値を $\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{X} + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{Y}$ と表す．任意の非ハブ空港のペア $(p, q) \in \widetilde{N^2}$ に対して，X_{pi} と X_{qj} は独立であるため，$\mathrm{E}[Y_{piqj}] = \mathrm{E}[X_{pi}]\mathrm{E}[X_{qj}] = x^*_{pi}x^*_{qj}$ が成り立つ．$y'_{piqj} := x^*_{pi}x^*_{qj}$ と定めると，解法 3.3 により得られる目的関数値の期待値は，$\mathrm{E}[\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{X} + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{Y}] = \widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y'}$ と表すことができる．$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}')$ は LPR の実行可能解であることから，補題 3.4 より

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y'} &\le \widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + (\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*) \\ &\le 2\,(\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*)\end{aligned}$$

が得られる．$\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*$ は LPR の最適値であり，QIP の目的関数値の下界を与える．ゆえに，題意は満たされる．■

4. ハブ空港数が 3 つの場合に対する近似解法

本章では，ハブ空港数が 3 つの場合に対する (4/3)-近似解法と (5/4)-近似解法を提案する．本章では，ハブ空港間の単位輸送コストを $a := c_{12}$, $b := c_{23}$, $c := c_{13}$ により表す．また，ハブ空港の順列全体の集合を Π と表す．LPR の実行可能解が与えられたとき，任意の順列 $\pi \in \Pi$ に対して次の手続きを定める．

従属ラウンディング π

1. 区間 $[0, 1)$ で一様分布に従う確率変数 U を 1 つ生成する．

2. 各非ハブ空港 $p \in N$ を，ハブ空港 $\pi(i)$ に接続する．ただし，$i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ は $U < x_{p\pi(1)} + \cdots + x_{p\pi(i)}$ を満たす最小の番号である．□

ここで，ハブ空港の順列 $(2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)$ をそれぞれ π^1, π^2, π^3 と表す．

解法 4.1 ((4/3)-近似解法)

1. 線形緩和問題を解き，最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ を得る．

2. 従属ラウンディング π^1, π^2, π^3 を，それぞれ α_1, α_2, α_3 の確率で実行する．ただし，α_1, α_2, α_3 は以下で与えられる：

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= b(b + c - a)(a + b - c)/M, \\ \alpha_2 &= c(c + a - b)(b + c - a)/M, \\ \alpha_3 &= a(a + b - c)(c + a - b)/M, \\ M &= 4abc - (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).\end{aligned}$$

補題 4.2 LPR の実行可能解を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ とする．仮定 2.1 の下で，与えられた入力に対して，解法 4.1 を適用することにより得られる近似解 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ は，以下を満たす：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[X_{pi}] = x_{pi} \quad (\forall (p, i) \in N \times H), \\ &\mathrm{E}\left[\textstyle\sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} Y_{piqj}\right] \\ &\le (4/3) \textstyle\sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y_{piqj} \quad (\forall (p, q) \in \widetilde{N^2}).\end{aligned}$$

定理 4.3 仮定 2.1 の下で，解法 4.1 は，ハブ空港数が 3 つの場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の (4/3)-近似解法である．

証明 与えられた入力に対して，解法 4.1 を適用することにより得られる近似解を $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ と表す．補題 4.2 より

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left[\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{X} + \textstyle\sum_{(p,q) \in \widetilde{N^2}} w_{pq} \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} Y_{piqj}\right] \\ &\quad\le \widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \textstyle\sum_{(p,q) \in \widetilde{N^2}} w_{pq} \cdot (4/3) \sum_{i \in H} \sum_{j \in H} c_{ij} y^*_{piqj} \\ &\quad= \widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + (4/3)\, \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^* \le (4/3)\,(\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*)\end{aligned}$$

が得られる．ゆえに，題意は満たされる．■

解法 4.4 ((5/4)-近似解法) 解法 3.3 と解法 4.1 を実行し，目的関数値が小さい方の解を出力する．

定理 4.5 仮定 2.1 と仮定 2.2 の下で，解法 4.4 は，ハブ空港数が 3 つの場合に対するハブ・アンド・スポークネットワーク設計問題の (5/4)-近似解法である．

証明 解法 3.3 と解法 4.1 により得られる目的関数値をそれぞれ Z_1 と Z_2 により表す．このとき，定理 3.5 の証明より，$\mathrm{E}[Z_1] \le 2\,\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*$ が成り立つ．一方，定理 4.3 の証明より，$\mathrm{E}[Z_2] \le \widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + (4/3)\,\widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*$ が成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\min\{Z_1, Z_2\}] &\le (1/4)\,\mathrm{E}[Z_1] + (3/4)\,\mathrm{E}[Z_2] \\ &\le (5/4)\,(\widehat{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{x}^* + \widetilde{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{y}^*)\end{aligned}$$

が得られる．ゆえに，題意は満たされる．■

ハブ空港数が 3 つの場合に対する (4/3)-近似解法は，Kleinberg and Tardos (2002) により定義されたメトリックラベリング問題に対して，ラベル数が 3 つの場合に同じ近似率で適用することができる．また，(4/3)-近似解法と同じ枠組みを用いることで，ユニフォームラベリング問題と呼ばれる問題に対して，ラベル数が 4 つの場合に近似率 5/3 を達成することができる．これにより，現在までに知られている最善の近似率 11/6 を改善することができる．

参考文献

[1] J. Kleinberg and E. Tardos, "Approximation algorithms for classification problems with pairwise relationships," Journal of the ACM, 49 (2002), pp. 616–630.

[2] J. Sohn and S. Park, "The single allocation problem in the interacting three-hub network," Networks, 35 (2000), pp. 17–25.