離散凸解析の多項式順序環への拡張とその応用

相田 森羅

2007 年 2 月 5 日

概要

離散凸解析は，組合せ最適化において性質のよい問題を統一的な立場で把握する理論である．本研究では，離散凸解析の枠組を整数や実数から多項式順序環の上に拡張することを試みた．

最適化においては，目的関数 f を最大にする解の中で g を最大にするものを求めたい，といった状況がしばしば発生する．例えば，二部グラフの枝に重みが与えられ，最大マッチングの中で重みが最大になるものを求めよ，という問題がある．通常，そのような問題では f に大きな定数を乗じて $Mf+g$ を最大化する手法がとられる．しかし，誤った答えを出さないような十分大きな M を求めるには個別の問題に対する理解と工夫が必要であり，一般性のある扱いにはならない．

そこで本研究では “大きな数” のかわりに文字を導入する解決策を提案した．具体的には，文字集合 Ω から生成される多項式環 $\mathbb{R}[\Omega]$ に次の性質

$$x, y, z \in \mathbb{R}[\Omega],\ x < y \Longrightarrow x + z < y + z$$
$$x, y \in \mathbb{R}[\Omega],\ x > 0,\ y > 0 \Longrightarrow xy > 0$$

を満たすような全順序を定め，さらに単項式の間によい性質 (超限帰納法を適用できる，など) を仮定して線形計画法と離散凸集合の理論を展開した．

$\mathbb{R}$ 上の通常の $m \times n$ 行列 A と多項式ベクトル $b \in \mathbb{R}[\Omega]^m,\ c^t \in \mathrm{rlows}\,\mathbb{R}[\Omega]^n$ に対し，

$$\begin{aligned}
\text{(P) minimize}\quad & c^t x \\
\text{subject to}\quad & Ax = b,\ x \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}[\Omega]^n) \\
\text{(D) maximize}\quad & y^t b \\
\text{subject to}\quad & y^t A \leq c^t \quad (y \in \mathbb{R}[\Omega]^m)
\end{aligned}$$

という 1 組の線形計画問題を考える．本研究では，この線形計画問題が well-defined であり強双対定理が成立することを示した．さらに実数上の線形計画問題で整数性をもつものは b, c^t を多項式に拡張しても整数性がある意味で保たれることを示した．

次に多項式順序環上に離散凸集合の概念を拡張できることを示した．整数係数の多項式の集合 $B \subseteq \mathbb{Z}[\Omega]^V$ が**交換公理**

(B-EXC[$\mathbb{Z}[\Omega]$])　$x, y \in \mathbb{Z}[\Omega]^V$ のとき任意の $\tau \in \mathcal{T},\ u \in \mathrm{supp}^+ \pi_\tau(x-y)$ に対して $\pi_\tau \alpha_0 = \tau$ なる $\alpha_0 \in \mathbb{Z}[\Omega]$ と $v \in \mathrm{supp}^- \pi_\tau(x-y)$ が存在して, 全ての $\alpha \in [0, \alpha_0]$ に対し $x+\alpha(\aleph_v - \aleph_u) \in B,\ y-\alpha(\aleph_v - \aleph_u) \in B$

を満たし, かつ $B \neq \emptyset$ であるとき B を M **凸集合**であると定義する．また整数係数の多項式の集合 $D \subseteq \mathbb{Z}[\Omega]^V$

が次の条件

$$p, q \in D \Longrightarrow p \vee q, p \wedge q \in D \tag{1}$$

$$p \in D,\ \alpha \in \mathbb{Z}[\Omega] \Longrightarrow p + \alpha\mathbf{1} \in D \tag{2}$$

を満たし，かつ $D \neq \emptyset$ であるとき D を L **凸集合**であると定義する．このとき整数上の離散凸集合と類似の性質が成立する．

本研究の結果により，順序環と離散凸解析双方の強みを発揮できるような応用には必ずしもたどりつかなかったが，線形計画の範囲で済む問題，例えば線形コストの最小費用流問題は完全に扱えることが分かった．M 凸関数，L 凸関数の理論を構築する段階に達すればより広範な応用が可能になるだろう．