正則有向グラフの短縮型ジグザグ積における ランダムウォークの収束性

野村 俊一
指導教員: 竹村 彰通 教授

2007 年 2 月 5 日

概要

本論文ではグラフのジグザグ積を変更した新たなグラフの積（短縮型ジグザグ積）を提案する．ジグザグ積とは 2 つの正則有向グラフから，より頂点数の大きな正則有向グラフを作る演算である．グラフ上のランダムウォークにおける確率分布の定常分布への収束の速さは spectral expansion という量で表されるが，spectral expansion の小さい正則有向グラフ同士のジグザグ積は spectral expansion が小さいことが [1, 2, 3] で示されている．本論文で提案する短縮型ジグザグ積は，ジグザグ積と比べて頂点数は等しく次数のより小さい正則有向グラフを作る演算である．本論文では正則有向グラフのジグザグ積と短縮型ジグザグ積の冪乗について，spectral expansion の新たな上限を導出する．

1 正則有向グラフと spectral expansion

多重辺と自己ループを許す一般有向グラフを考える．各頂点で出ていく辺と入ってくる辺がそれぞれ M 本ずつあるグラフを **M-正則有向グラフ**という．頂点集合を $[N] \stackrel{\text{def.}}{=} \{1, \dots, N\}$ とする M-正則有向グラフ G 上のランダムウォークを考える．このランダムウォークの確率推移行列 A の (w, v) 成分を

$$A_{wv} = \frac{\text{頂点 } v \text{ から頂点 } w \text{ への辺の数}}{M}$$

とおく．このとき，$\mathbf{1}_N \stackrel{\text{def.}}{=} (1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$ とおくと，$\boldsymbol{u}_N \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{1}_N / N$ は G 上のランダムウォークの定常分布である．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ のユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}||$ と表す．ここで，G 上のランダムウォークの定常分布への収束速度を表す *spectral expansion* を定義する．

定義 1 グラフ G を頂点集合 $[N]$ の M-正則有向グラフとし，G 上のランダムウォークの確率推移行列を A とおく．このとき

$$\lambda(G) \stackrel{\text{def.}}{=} \max_{\boldsymbol{x} \perp \mathbf{1}_N} \frac{||A\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{x}||}$$

をグラフ G の *spectral expansion* という．

ここで $\lambda(G)$ は A の**第 2 特異値**（2 番目に大きい特異値）となる．初期分布を $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$ とおくと

$$||A^k \boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}_N|| = ||A^k(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}_N)|| \leq \lambda(G)^k ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{u}_N||$$

が成り立つ．

2 正則有向グラフのジグザグ積と短縮型ジグザグ積の定義

M-正則有向グラフ G の各頂点に接続する辺にラベル付けを行う．M-正則有向グラフ G における**双方向ラベリング**とは，G の各頂点から出る M 本の辺に $1, \dots, M$ の番号を互いに異なるよう割り当て，各頂点に入る M 本の辺にも同様に番号を割り当てることをいう．

ここで，頂点集合 $[N]$ の M-正則有向グラフ G と，頂点集合 $[M]$ の D-正則有向グラフ H から，G の双方向ラベリングを用いてジグザグ積 $G \textcircled{z} H$ と短縮型ジグザグ積 $G \cancel{\textcircled{z}} H$ を構成する方法を述べる．

グラフ G, H の**ジグザグ積**$G \textcircled{z} H$ とは頂点集合 $[N] \times [M]$ を持ち，頂点 $(v, s) \in [N] \times [M]$ から以下の 3 ステップによって移ることができる頂点 (w, t) へと辺をつないだグラフである．

Step1. (v, s) のうち v は固定し，グラフ H 上の頂点 s から出る辺をたどって s から s' に推移させる．

Step2. グラフ G において頂点 v から出る s' 番目の辺が頂点 w に入る t' 番目の辺であるときに，頂点 (w, t') に推移させる．

Step3. (w, t') のうち w は固定し，グラフ H 上の頂点 t' から出る辺をたどって t' から t に推移させる．

本論文で提案する短縮型ジグザグ積 $G \cancel{\textcircled{z}} H$ は，いまのジグザグ積 $G \textcircled{z} H$ に対して頂点集合は同じであるが，辺をつなぐまでのステップを上のステップ 1,2 だけに短縮したものである．

グラフ G, H の**短縮型ジグザグ積**$G \cancel{\textcircled{z}} H$ は頂点集合 $[N] \times [M]$ を持ち，頂点 $(v, s) \in [N] \times [M]$ から以下の

2 ステップによって移ることができる頂点 (w, t) へと辺をつないだグラフである．

Step1．(v, s) のうち v は固定し，グラフ H 上の頂点 s から出る辺をたどって s から s' に推移させる．

Step2．グラフ G において頂点 v から出る s' 番目の辺が頂点 w に入る t 番目の辺であるときに，頂点 (w, t) に推移させる．

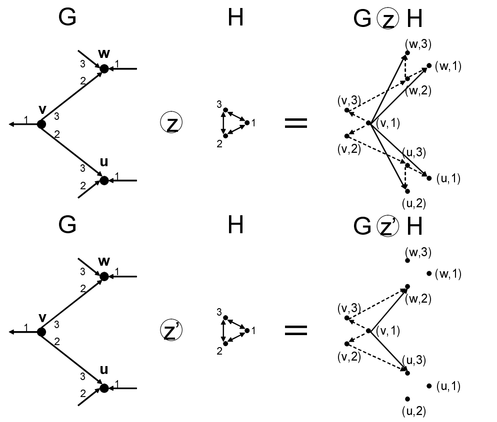

図 1　ジグザグ積 $G \textcircled{z} H$（上）と短縮型ジグザグ積 $G \textcircled{z'} H$（下）の様子．グラフ G は一部のみ示し，各頂点に接続する辺には $\{1, 2, 3\}$ より番号が与えられている．グラフ H はその番号と同じ頂点集合を持つグラフである．ジグザグ積 $G \textcircled{z} H$ と短縮型ジグザグ積 $G \textcircled{z'} H$ の頂点集合は，図のように G の各頂点に H の頂点集合を埋め込んだ形となっている．また辺については，それぞれ頂点 $(v, 1)$ から出る辺のみ表示している．図の破線はそれぞれの辺をつなぐまでのステップ（ジグザグ積なら $(v, 1) \xrightarrow{\text{Step1.}} (v, 3) \xrightarrow{\text{Step2.}} (w, 2) \xrightarrow{\text{Step3.}} (w, 1)$ など）を示している．

3　ジグザグ積と短縮型ジグザグ積の spectral expansion の上限

正則有向グラフのジグザグ積と短縮型ジグザグ積の spectral expansion は，それぞれ次のように上から抑えられる．

定理 1 $\lambda(G) \leq \alpha < 1, \lambda(H) \leq \beta < 1$ のとき $\lambda(G \textcircled{z} H) \leq f(\alpha, \beta)$ となる．ただし

$$f(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} f_1(\alpha, \beta), & \text{if } 2\alpha + \beta \leq 1 \\ f_2(\alpha.\beta), & \text{if } 2\alpha + \beta > 1 \end{cases}$$

$$f_1(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\alpha(1-\beta^2)(\alpha+\beta)+\beta^2},$$

$$f_2(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def.}}{=} \beta^2 + (1-\beta) \times \sqrt{\alpha^2+\beta^2 \min\{1+\alpha, 2-\alpha^2\}+\alpha\beta\min\{2, 1+2\alpha\}}.$$

定理 2 $\lambda(G) \leq \alpha < 1, \lambda(H) \leq \beta < 1$ のとき

$$\lambda(G \textcircled{z'} H) = 1,$$

$$\lambda((G \textcircled{z'} H)^k) \leq f'(\alpha, \beta)^{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

となる．ただし $f'(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def.}}{=} f(\alpha, \sqrt{\beta})$.

ここで $(G \textcircled{z'} H)^k$ は，$G \textcircled{z'} H$ と同じ頂点集合を持ち，$G \textcircled{z'} H$ 上の長さ k の有向歩道の始点から終点へと辺をつないだグラフである．定理 2 の第 1 式は，短縮型ジグザグ積 $G \textcircled{z'} H$ 上のランダムウォークにおいて，1 回の推移では確率分布が定常分布に近づかない場合があることを示している．また第 2 式の $\lambda((G \textcircled{z'} H)^k)$ は，$G \textcircled{z'} H$ 上のランダムウォークにおける k (≥ 2) 回の推移での収束速度を示している．

4　結論

本論文では，グラフのジグザグ積を変更した短縮型ジグザグ積という新たなグラフの積を提案した．また，ジグザグ積の spectral expansion の新たな上限と，短縮型ジグザグ積の冪乗の spectral expansion の上限を導出した，本論文で示したジグザグ積の spectral expansion の上限は，[1, 2, 3] で示された上限の一部よりも強いものである．短縮型ジグザグ積については，短縮型ジグザグ積自体の spectral expansion は最悪の 1 となるが，短縮型ジグザグ積を冪乗したグラフの spectral expansion の上限を導出した．

今後の課題として，定理 1 の証明を改良することにより，さらに上限を低くできるかどうかを考えたい．

参考文献

[1] O. Reingold, L. Trevisan and S. Vadhan. Pseudorandom walks in biregular graphs and the RL vs. L problem. Technical Report TR05-022, Electronic Colloquium on Conputational Complexity (ECCC), 2005.

[2] O. Reingold, L. Trevisan and S. Vadhan. Pseudorandom walks on regular digraphs and the RL vs. L problem. *Proceedings of the 38th ACM Symposium on Theory of Computing, (STOC 2006)* 2006, pp.457-466.

[3] O. Reingold, S. Vadhan and A. Wigderson. Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders. *Annals of Mathematics,* Vol.155, No.1, 2001, pp.157-187. Extended abstract in *FOCS 2000.*