

ゲーム論的確率論における 大数の強法則の収束レートの研究

数理情報学専攻 56219 堀越 保徳

指導教員 竹村 彰通 教授

1 概要

ゲーム論的確率論は, Shafer and Vovk により 2001 年に “Probability and Finance – It’s Only a Game” で提唱された新しい確率論である [2].

Shafer and Vovk は, その本の最初に大数の強法則を証明している. また, Kumon and Takemura は大数の強法則における収束レートの上界を与えている [1]. 本研究では, 彼らとは逆に大数の強法則における収束レートの下界を考察した.

2 ゲーム論的確率論におけるコイン投げ

本研究では, コイン投げにおける大数の強法則を考察の対象とした. 測度論的確率論では, 無限回コインを投げるとい現象について議論するために確率測度を構成するが, ゲーム論的確率論では次で定義されるゲームにより議論を行う.

FAIR COIN GAME

$\mathcal{K}_0 := 1.$

FOR $n = 1, 2, \dots :$

Skeptic announces $M_n \in \mathbb{R}.$

Reality announces $x_n \in \{-1, 1\}.$

$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n.$

END FOR

このゲームは, Skeptic と呼ばれるプレイヤーがコインの裏表を当てる賭けを無限回行う状況を定式化したものであり, Skeptic の他に Reality と呼ばれるプレイヤーが存在する. Reality は任意にコインの裏表を定めることができる.

Skeptic は賭けによって資金を無限に増大させることを目標とし, Reality はそれを防ごうとする. M_n は Skeptic が第 n ラウンドに賭ける額, x_n は Reality がコインの裏表のどちらを選択したかを表す. Reality は Skeptic が賭け金を公開した後でコインの裏表を決定する. 以下本稿では, $-1, 1$ をそれぞれコインの裏, 表に対応させて考える. Skeptic が賭けによって得る賞金は $M_n x_n$ である. つまり Skeptic は, コインが表 (裏) の時, $M_n (-M_n)$ の賞金を得る. 従って Skeptic は, Reality

が表 (裏) を出すと予想する時, M_n を正 (負) にする. \mathcal{K}_0 は Skeptic の初期資金であり, \mathcal{K}_n は第 n ラウンド終了後の Skeptic の全資金, つまり, 初期資金とそれまでに得た賞金の和である. \mathcal{K}_n は

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n$$

という式で更新される. 以下本稿では,

$$s_0 := 0$$

$$s_n := x_1 + \dots + x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\bar{x}_0 := 0$$

$$\bar{x}_n := \frac{s_n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする.

3 ゲーム論的確率論における大数の強法則の主張

Shafer and Vovk は,

$$|\bar{x}_n| \text{ が } 0 \text{ に収束しない} \Rightarrow \mathcal{K}_n \rightarrow \infty$$

となる Skeptic の戦略が存在することを示した. これにより Reality は, Skeptic の資金を無限に増大させないために, $|\bar{x}_n| \rightarrow 0$ とすることが必要となる. 従って, どのような戦略を用いても公平な賭けによって資金を無限に増大させることが不可能であるということを認めるならば, 自動的に Reality が大数の法則に従わないことはあり得ないことも認めなければならないというのがゲーム論的確率論の大数の強法則の主張である.

4 momentum strategy と収束レートの上界

$s_n > 0 (< 0)$ の時に $M_n > 0 (< 0)$ とする戦略を momentum strategy と呼ぶ. Shafer and Vovk による大数の強法則の証明も, Kumon and Takemura による収束レートの上界の証明も, momentum strategy が用いられた. momentum strategy を用いた場合, $|s_n|$ が大きくなると \mathcal{K}_n も大きくなる. 従って, \mathcal{K}_n を小さくするためには $|s_n|$ を小さくすることが必要となり, その結果として収束レートの上界が得られるのである. 本研究では, momentum strategy とは逆に $s_n < 0 (> 0)$ の時に $M_n > 0 (< 0)$ となる戦略を用いることにより, 収束

レートの下界を証明できることを示す. このような戦略を *contrarian strategy* と呼ぶ.

5 本研究の成果

5.1 収束レートの下界 1

定理 1 Skeptic は,

$$\limsup(1 + 2c)\sqrt{n}|\bar{x}_n| \leq 1 \quad (1)$$

となることを Reality に強制出来る.

ただし, Reality に (1) を強制出来るとは,

$$\limsup(1 + 2c)\sqrt{n}|\bar{x}_n| > 1 \Rightarrow \mathcal{K}_n \rightarrow \infty$$

となる戦略が存在するという意味である.

この定理の証明には, $0 < c \leq 1/2$ として,

$$M_n = -c\bar{x}_{n-1}\mathcal{K}_{n-1}$$

という戦略を用いた. この戦略は *contrarian strategy* である. また, 定数 $1 + 2c$ を 1 にしても定理が成り立つ.

5.2 収束レートの下界 2

定理 2 Skeptic は,

$$|s_n| > \sqrt{n} - 1 \text{ i.o.} \quad (2)$$

となることを Reality に強制出来る.

この定理の証明には,

$$M_n = -\epsilon s_{n-1}$$

という戦略を用いた. これも *contrarian strategy* である. この定理の証明の過程で, 次の補題も証明した.

補題 1 Sketpic は,

$$\limsup s_n = \infty \ \& \ \liminf s_n = -\infty$$

となることを Reality に強制出来る.

このことから, Reality は

$$s_n = 0 \text{ i.o.}$$

を強制されていることになる.

5.3 片側戦略

contrarian strategy は正負対称な戦略である. 従って, *contrarian strategy* では $|s_n|$ に関する条件しか強制出来ない. つまり, Skeptic が *contrarian strategy* のみを用いるのであれば, Reality は常に s_n を非負であるようにも出来る. しかし, 我々は次の定理を証明することにも成功した.

定理 3 Skeptic は

$$s_n > \sqrt{n} - 1 \text{ i.o.}$$

となることを Reality に強制出来る.

6 今後の課題

本研究では *fair coin game* を扱ったが, Shafer and Vovk による大数の強法則の証明や, Kumon and Takemura による収束レートの上界の証明で用いられているゲームは, *bounded forecasting game* である. *bounded forecasting game* では, Reality は自分の行動を $\{-1, 1\}$ ではなく $[1, 1]$ の中から選択することが出来る. 本論文で用いられた議論を単純に *bounded forecasting game* の場合に拡張することは出来ない. それは, *bounded forecasting game* では, Reality は常に $x_n = 0$ を選択することが可能であり, そのような行動を取られたら, Skeptic は全く資金を増やすことが出来ないからである. 従って, $x_n = 0$ となり得るゲームにおいて, 収束レートが小さい時に資金を増大させるためにはどのような戦略を用いればよいか, という問題が持ち上がる.

また, Shafer and Vovk による大数の強法則及び, Kumon and Takemura による収束レートの上界に関する定理で用いられた *momentum* な戦略では, 資金が無限に増大するときに, その増大の仕方がラウンド数に対して指数的であった. しかし, 本論文で与えた 2 つの *contrarian* な戦略では資金が無限に増大するとしても高々線形のオーダーでしか増大しない.*momentum* な戦略と *contrarian* な戦略の間にある, この資金増大度の違いも興味を惹く問題である.

本論文の証明は, (i) *contrarian* な戦略によって, $|s_n|$ が大きくなることの強制. (ii) s_n が片側に偏らずに両側に広がっていくことの強制. の 2 段階に分けて述べられた. そこで, このような 2 段階の証明ではなく, 直接, s_n があまり大きくなるときに資金が増大するような戦略を構成出来ないかという問題も生じる.

参考文献

- [1] M. Kumon and A. Takemura : On a simple startegy weakly forcing the strong law of large numbers in the bounded forecasting game. Technical Report METR 05-20, University of Tokyo, 2005. To appear in *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, available on line at <http://arxiv.org/abs/math.PR/0508190>.
- [2] G. Shafer and V. Vovk : *Probability and Finance - It's Only a Game!*, Wiley, New York, 2001.