A Unified Approach to Combinatorial Algorithms for Matchings and Matroids

マッチングとマトロイドの組合せ的アルゴリズムへの統一的アプローチ

56211 Kenjiro Takazawa (髙澤 兼二郎)

Supervisers: Professor Kazuo Murota
Professor Satoru Iwata

1. はじめに

組合せ最適化の分野のコアをなす研究対象として, マッチングとマトロイド交叉が挙げられる. マッチングとマトロイド交叉の共通の一般化として, Cunningham–Geelen [4] は無向グラフにおける**独立パスマッチング**という概念を導入した. さらに, 最大パスマッチングの組合せ的アルゴリズムの構築のため, Cunningham–Geelen [2] はパスマッチングの一般化として有向グラフにおける**偶因子**の概念を, さらに, 偶因子とマトロイド交叉の共通の一般化として**基底偶因子**の概念を導入した.

偶因子とは, 互いに頂点を共有しない, 有向道と偶数長の有向閉路の集まりと定義される. 与えられた有向グラフに対し, 枝数最大の偶因子を求める問題を最大偶因子問題という. 最大偶因子問題は一般の有向グラフにおいてはNP-困難であるが, 奇閉路対称グラフにおける組合せ的な多項式時間アルゴリズムが, Edmonds のマッチングアルゴリズム [6] の拡張として Pap [11,12] によって提案されている. 有向グラフが奇閉路対称であるとは, 任意の奇数本の枝からなる閉路 (奇閉路) に逆向き閉路が存在するという性質を持つことをいう.

本研究では, 偶因子に関連する三つの結果を示した:

- 最大重み偶因子の組合せ的アルゴリズム,
- 独立偶因子の組合せ的アルゴリズム,
- 偶因子の次数列によるジャンプシステムの導出.

本稿では頂点集合 V, 枝集合 A からなる有向グラフを (V, A) と書く. また, 枝重み $w \in \mathbf{R}^A$ を付随した有向グラフ $G = (V, A)$ を重みつきグラフ (G, w) と書く. また, $|V|$, $|A|$ をそれぞれ n, m で表す. また, 頂点 $v \in V$ に対して, v を始点, 終点とする枝集合をそれぞれ $\delta^+ v$, $\delta^- v$ と書く. 枝 $a \in A$ について, その始点, 終点をそれぞれ $\partial^+ a$, $\partial^- a$ と書く. また, $B \subseteq A$ について, $\partial^+ B = \{v \mid v \in V, \exists a \in B, \partial^+ a = v\}$, $\partial^- B = \{v \mid v \in V, \exists a \in B, \partial^- a = v\}$ と定める. $X^+, X^- \subseteq V$ について, X^+ から $X^- \setminus X^+$ への枝および $X^+ \setminus X^-$ から X^- への枝が存在しないとき, (X^+, X^-) は**安定対**であるという. また, $X \subseteq V$ に対して, X の誘導部分グラフの強連結成分で, 頂点数が奇数で他の成分から入る枝のない成分の個数を $\mathrm{odd}(X)$ と書く.

2. 最大重み偶因子の組合せ的アルゴリズム

最大重み偶因子問題とは, 重みつきグラフ (G, w) において枝重みの和 $\sum_{a \in F} w_a$ を最大にする偶因子 F を求める問題である. 弱対称グラフに対しては Cunningham–Geelen [2] が偶因子アルゴリズムを繰り返し呼び出すことによる多項式時間解法を提案しており, この解法に Pap のアルゴリズムを用いることによって計算時間 $\mathrm{O}(n^7)$ の組合せ的アルゴリズムを得る.

一方 Király–Makai [8] は, 重みつき奇閉路対称グラフ (G, w) における最大重み偶因子問題を線形計画問題で表現した:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \max. & wx \\
& \text{s.t.} & x\left(\delta^- v\right) \le 1 \qquad (\forall v \in V), \\
& & x\left(\delta^+ v\right) \le 1 \qquad (\forall v \in V), \\
& & x\left(A[U]\right) \le |U| - 1 \ (\forall U \subseteq V,\ |U|\text{: odd}), \\
& & x \ge 0.
\end{array}
$$

双対問題は以下のようになる:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \min. & \displaystyle\sum_{v \in V} \left(\pi_v^- + \pi_v^+\right) + \sum_{U \subseteq V, |U|:\mathrm{odd}} y_U(|U| - 1) \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\pi^-_{\partial^- a} + \pi^+_{\partial^+ a} + \sum_{\substack{\text{odd set } U,\\ \partial^+ a, \partial^- a \in U}} y_U \ge w_a \ (\forall a \in A), \\
& & \pi_v^-,\ \pi_v^+,\ y_U \ge 0.
\end{array}
$$

これらの線形計画問題に対し, 以下の定理が成り立つ.

定理 1 (Király–Makai [8]). 重みつき奇閉路対称グラフ (G, w) において, w が整数ならば, 線形計画問題 (P) と (D) はそれぞれ整数最適解を持つ.

本研究では, この線形計画表現に基づき最大重み偶因子を求める組合せ的なアルゴリズムを提案した. 本アルゴリズムは Edmonds の最大重みマッチングアルゴリズム [5] と Pap の偶因子アルゴリズムの枠組に基づいた主双対アルゴリズムであり, 計算時間は $\mathrm{O}(n^3 m)$ である. 本アルゴリズムは最大重み偶因子と双対最適解を同時に求め, 特に枝重み w が整数の場合には整数最適解が求まり, 定理 1 の構成的な証明を与える.

3. 独立偶因子の組合せ的アルゴリズム

有向グラフ $G = (V, A)$ と V を台集合とする二つのマトロイド $\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-$ があるとする. $\mathbf{M}^+$, $\mathbf{M}^-$ の独立集合族をそれぞれ $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$, 階数関数を ρ^+, ρ^- と書く. このとき, $F \subseteq A$ が以下の (i)–(iii) を満たすとき, F は $(G, \mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-)$ における**独立偶因子**であるという: (i) F は G における偶因子; (ii) $\partial^+ F \in \mathcal{I}^+$; (iii) $\partial^- F \in \mathcal{I}^-$. $(G, \mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-)$ における最大独立偶因子 (枝数最大の独立偶因子) の大きさを $\nu(G, \mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-)$ と書く. 独立偶因子はマッチングとマトロイド交叉を共通に一般化する概念であり, 基底偶因子と本質的に等価である.

独立偶因子に対し, 以下の最大最小定理が成り立つ.

定理 2. $G = (V, A)$ を奇閉路対称グラフ, $\mathbf{M}^+$, $\mathbf{M}^-$ をそれぞれ V 上のマトロイドとする. このとき,

$$
\nu(G, \mathbf{M}^+, \mathbf{M}^-) = \min_{(X^+, X^-)} \bigl\{\rho^+(V \setminus X^+) + \rho^-(V \setminus X^-) + \left|X^+ \cap X^-\right| - \mathrm{odd}(X^+ \cap X^-)\bigr\}. \quad (1)
$$

ただし, (X^+, X^-) の範囲はすべての安定対である.

この定理は, マッチングの最大最小定理やマトロイド交叉の最大最小定理を特殊ケースとして含む.

さらに, 最大独立偶因子を求めるアルゴリズムを提案した. 本アルゴリズムは古くから知られるマトロイド交叉アルゴリズム [7,9] と Pap の偶因子アルゴリズムとを共通に拡張するものである. アルゴリズムの終了時点で式 (1) を等号で満たす独立偶因子と安定対が得られることからその正当性は保証される.

本アルゴリズムから, マッチングの Edmonds-Gallai 分解とマトロイド交叉の基本分割を共通に拡張する分割定理が得られる. また, アルゴリズムの計算量は $\mathrm{O}(n^4 Q)$ (Q はマトロイドの独立判定の時間) である.

4. 偶因子の次数列の構造

マトロイドの一般化として, Bouchet–Cunningham [1] は**定パリティジャンプシステム**を導入した. 整数格子点の非空な部分集合 $J \subseteq \mathbf{Z}^V$ は, 以下の交換公理を満たすとき, 定パリティジャンプシステムであるという.

(J-EXC) J に含まれる任意の x, y と, 任意の (x,y)-増加ベクトル s に対し, ある $(x+s, y)$-増加ベクトル t が存在して, $x+s+t \in J$ かつ $y-s-t \in J$ が成立する.

ただし, s が (x,y)-増加ベクトルであるとは, $s = \chi_u$ かつ $x(u) < y(u)$ であるか, あるいは $s = -\chi_u$ かつ $x(u) > y(u)$ であることをいう. ここで, $\chi_u \in \{0,1\}^V$ は $u \in V$ に対応する成分のみが 1 で, その他の成分はすべて 0 である単位ベクトルを表す. 以下では定パリティジャンプシステムのことを単にジャンプシステムという.

室田 [10] によって提唱されたジャンプシステム上の M 凸関数 (以下単に M 凸関数という.) は, ジャンプシステムの定量的一般化である. 関数 $f : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が M 凸関数であるとは, 実効定義域 $\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbf{Z}^V \mid f(x) < +\infty\}$ が非空であり, かつ以下の交換公理を満たすことをいう.

($\mathbf{M^J}$-EXC) $\mathrm{dom} f$ に含まれる任意の x, y と, 任意の (x,y)-増加ベクトル s に対し, ある $(x+s, y)$-増加ベクトル t が存在して, $f(x)+f(y) \geq f(x+s+t)+f(y-s-t)$ を満たす.

関数 $-f$ が M 凸関数であるとき, f は M 凹関数であるという. 例えば, マッチングの次数列はジャンプシステムの例であり [1], 重みつきマッチングは M 凹関数の例として捉えることができる.

通常, 次数列は無向グラフにおいて定義されるが, 本研究では, 次数列を有向グラフに拡張し, 偶因子の次数列を扱った. 有向グラフ $G = (V, A)$ に対し, V^+, V^- をそれぞれ V のコピーとする. $B \subseteq A$ に対し, B の有向次数列 $d_B \in \mathbf{Z}^{V^+} \times \mathbf{Z}^{V^-}$ を以下で定義する:

$$d_B(v) = \begin{cases} |\{a \mid a \in B,\ \partial^+ a = v\}| & (v \in V^+), \\ |\{a \mid a \in B,\ \partial^- a = v\}| & (v \in V^-). \end{cases}$$

また, $B \subseteq A$ に対して, 頂点 $v \in V$ に入る枝数と出る枝数の合計を $\bar{d}_B(v)$ とするベクトル $\bar{d}_B \in \mathbf{Z}^V$ を B の無向次数列と呼ぶ. ここで, 偶因子の有向次数列全体 $J_{\mathrm{EF}}(G) = \{d_M \mid M \text{ は } G \text{ の偶因子}\} \subseteq \{0,1\}^{V^+ \cup V^-}$ および無向次数列全体 $\bar{J}_{\mathrm{EF}}(G) = \{\bar{d}_M \mid M \text{ は } G \text{ の偶因子}\} \subseteq \{0,1,2\}^V$ を考えると, G が奇閉路対称のとき $J_{\mathrm{EF}}, \bar{J}_{\mathrm{EF}}$ はそれぞれジャンプシステムとなる. この事実は Cunningham [3] の中で示唆されているが, 我々はこの定理の構成的な別証明を与えた.

定理 3. 奇閉路対称グラフの偶因子の有向次数列全体および無向次数列全体はジャンプシステムを成す.

さらに, 重みつき有向グラフ (G, w) に対し, $f : \mathbf{Z}^{V^+} \times \mathbf{Z}^{V^-} \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $\bar{f} : \mathbf{Z}^V \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ を

$$f(x) = \max \left\{ \textstyle\sum_{a \in M} w(a) \mid d_M = x \right\},$$
$$\bar{f}(x) = \max \left\{ \textstyle\sum_{a \in M} w(a) \mid \bar{d}_M = x \right\}$$

と定義すると, (G, w) が奇閉路対称な場合において f, $\bar{f}$ がそれぞれ M 凹関数となることを示した. ただし, x を次数列に持つ偶因子が存在しないときには, $f(x)$ や $\bar{f}(x)$ の値は $-\infty$ と定義する.

定理 4. 重みつき奇閉路対称グラフにおいて, f や $\bar{f}$ は M 凹関数である.

この定理は, 定理 3 を拡張するものであり, 最大重み偶因子問題の構造を M 凹関数を通じて捉えたものである.

5. おわりに

本研究では, マッチングとマトロイドという組合せ最適化の中核を担う研究対象を統一的に扱うという視点に立ち, マッチングを扱いやすくする一般化であると近年認識されつつある偶因子に関する三つの結果を示した.

今後の課題としては, 重みつき独立偶因子の組合せ的アルゴリズムの構築が挙げられる.

参考文献

[1] A. Bouchet and W. H. Cunningham: Delta-matroids, jump systems, and bisubmodular polyhedra, *SIAM J. Discrete Math.*, **8** (1995), 17–32.

[2] W. H. Cunningham and J. F. Geelen, Vertex-disjoint dipaths and even dicircuits, manuscript, 2001.

[3] W. H. Cunningham: Matching, matroids, and extensions, *Math. Program.*, **91** (2002), 515–542.

[4] W. H. Cunningham and J. F. Geelen: The optimal path-matching problem, *Combinatorica*, **17** (1997), 315–337.

[5] J. Edmonds: Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices, *J. Res. Natl. Bur. Stand., Sec B*, **69** (1965), 125–130.

[6] J. Edmonds: Paths, trees, and flowers, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 449–467.

[7] J. Edmonds: Matroid intersection, *Ann. Discrete Math.*, **4** (1979), 39–49.

[8] T. Király and M. Makai: On polyhedra related to even factors, *Proc. 10th IPCO*, LNCS 3064, Springer-Verlag, 2004, 416–430.

[9] E. L. Lawler: Matroid intersection algorithms, *Math. Program.*, **9** (1975), 31–56.

[10] K. Murota: M-convex functions on jump systems: a general framework for minsquare graph factor problem, *SIAM J. Discrete Math.*, **20** (2006), 213–226.

[11] G. Pap: A combinatorial algorithm to find a maximum even factor, *Proc. 11th IPCO*, LNCS 3509, Springer-Verlag, 2005, 66–80.

[12] G. Pap: Combinatorial algorithms for matchings, even factors and square-free 2-factors, *Math. Program.*, to appear.