

# 複雑系時系列の条件付分布の推定とその応用

指導教員 岡部 靖憲 教授

数理情報学専攻 数理第6研究室 山下 雅喜

2005年2月8日

## 1 はじめに

未来の事象の生起に関する確率分布を知ることができれば、ある特定の事象の起こる確率だけでなく、期待値や分散などの分布の特性量も求めることができ、それらの量を我々の行動選択の指標として役立てることができる。一般的な時系列分析手法は ARMA モデルや GARCH モデルのように、確率過程に何らかのモデルを仮定して分析を行う手法であり、そこから得られる条件付分布の形は攪乱項として加えるノイズの分布の形に依存している。

本研究では分布の形を仮定せず、KM<sub>2</sub>O-ランジュヴァン方程式論 [1] に基づく予測公式を用いて、柔軟に分布を推定することを目指す。また、本推定手法の実データへの応用として、地震波の時系列データの条件付分布の推定を行い、通常地震と深部低周波地震との構造の違いを解析する。

## 2 条件付分布の推定

### 2.1 条件付分布の定義

$\mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N)$  を確率空間  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  上で定義された実数  $\mathbf{R}$  の値をとる確率過程とし、 $X(n) : (\Omega, \mathcal{B}, P) \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  とする。

時刻 0 から  $n-1$  までの履歴によるフィルトレーションを  $\mathcal{F}_{n-1}$  とした時

$$\begin{aligned} P_{X(n)}(F | \mathcal{F}_{n-1}) &\equiv P(X(n) \in F | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E[\chi_F(X(n)) | \mathcal{F}_{n-1}] \quad (F \in \mathcal{B}(\mathbf{R})) \end{aligned}$$

で与えられる関数  $P_{X(n)}(\cdot | \mathcal{F}_{n-1})$  を  $\mathcal{F}_{n-1}$  に関する確率変数  $X(n)$  の条件付分布という。また、 $F$  を実数の区間  $(-\infty, x]$  とすることで、条件付分布関数を構成することができる。

### 2.2 非線形予測を用いた推定法

$\mathbf{Z} = (Z(n); 0 \leq n \leq N)$  を 1 次元の時系列とする。ここで任意の実数  $x$  を固定し、新たな時系列  $\mathbf{Y}_x =$

$(Y_x(n); 0 \leq n \leq N)$  を構成する:

$$\begin{aligned} Y_x(n) &\equiv \chi_{(-\infty, x]}(Z(n)) \\ &= \begin{cases} 1 & (Z(n) \leq x), \\ 0 & (Z(n) > x). \end{cases} \quad (0 \leq n \leq N). \end{aligned}$$

KM<sub>2</sub>O-ランジュヴァン方程式論の非線形予測公式を用いて、時刻 0 から  $N$  までの  $\mathbf{Z}$  の非線形情報空間に関する  $Y_x(N+1)$  の条件付期待値が得られ、その値を  $p_x$  とする。その際、Test(S) を用いて時系列の定常性を調べ、定常であるならばその定常性が時刻  $N+1$  においても保たれていることを仮定している。また、 $p_x$  は時刻  $N+1$  において  $Z(N+1) \leq x$  となる条件付確率の予測値である。

$\mathbf{Y}_x$  は高々  $N$  通りであり、 $\mathbf{Z}$  の各値を  $x$  として計算を行ってやればよい。一般に  $K$  ( $1 \leq K \leq N$ ) 個の  $p_x$  が計算できたとする。 $p_x$  を  $x$  の昇順に並び替えた列を  $\{p_k\}$  ( $1 \leq k \leq K$ ) とし、その時の  $x$  の値を  $\{x_k\}$  ( $1 \leq k \leq K$ ) とする。次の数理計画問題を解き、その解を  $\{\hat{p}_k\}$  ( $1 \leq k \leq K$ ) として得る:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K (p_k - \hat{p}_k)^2, \\ \text{s.t.} \quad & \hat{p}_1 \geq 0, \\ & \hat{p}_k \leq \hat{p}_{k+1} \quad (1 \leq k \leq K-1), \\ & \hat{p}_K \leq 1. \end{aligned}$$

また  $Z(n)$  の中で最大の値を  $x_{K+1}$  として、 $Z(N+1)$  の条件付分布関数  $\tilde{F}(x)$  を次のように定める:

$$\tilde{F}(x) \equiv \begin{cases} 0 & (x < x_1), \\ \hat{p}_k & (x_k \leq x < x_{k+1}) \quad (1 \leq k \leq K), \\ 1 & (x \geq x_{K+1}). \end{cases}$$

この関数を、非線形予測を用いて推定した条件付分布関数と呼ぶことにする。この手法により推定される分布関数は階段関数となっている。

## 3 人工時系列への適用

非線形予測を用いた手法と経験分布を用いた手法との比較を行った。独立同分布に従う乱数による時系列では、時系列の決定性が低く、経験分布を用いた手法

の推定精度のほうが良かった。しかし AR 過程に従う時系列や、レント写像のように決定的に変化する時系列では、時系列の決定性が高く、非線形予測を用いた手法の推定精度のほうが良くなるという結果が得られた。

## 4 地震波の時系列への適用

深部低周波地震とは 10 年ほど前に確認された特殊な地震であり、通常の地震とのメカニズムの違いなどが研究されている [2],[3]。

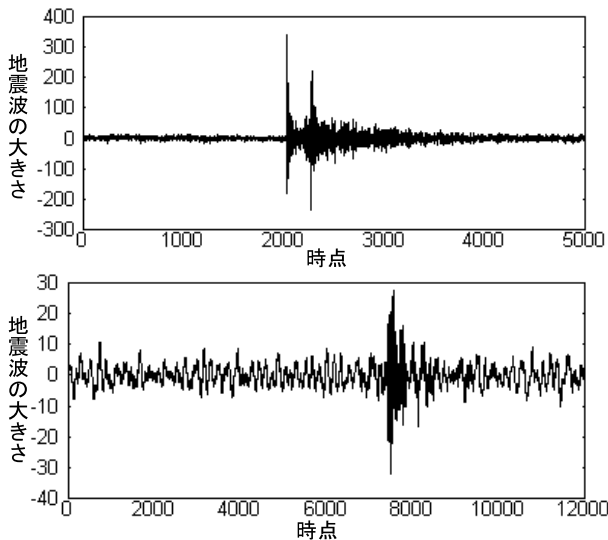


図 1: (上) 通常の地震 (下) 深部低周波地震

地震波の時系列に対して、本研究の手法により条件付分布の推定を行った結果の一部を図 2, 図 3 に示す。時系列の決定性が高いため、推定精度は比較的良いものである。図で色が濃く山のように見える箇所、薄く谷のように見える箇所は、それぞれ地震波がマイナス方向、プラス方向に変化する確率が高いことを表している。

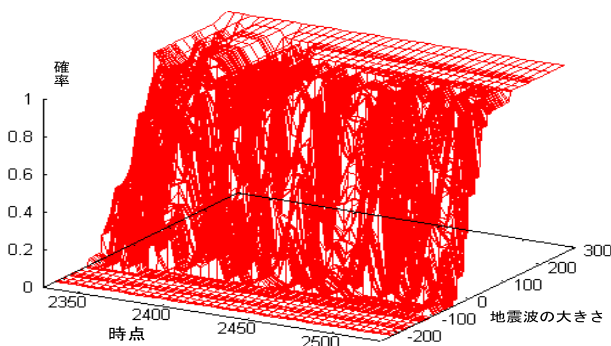


図 2: 通常の地震の条件付分布

深部低周波地震の S 波の到達後のみ、条件付分布のダイナミクスに明確な規則性が見られた。深部低周波

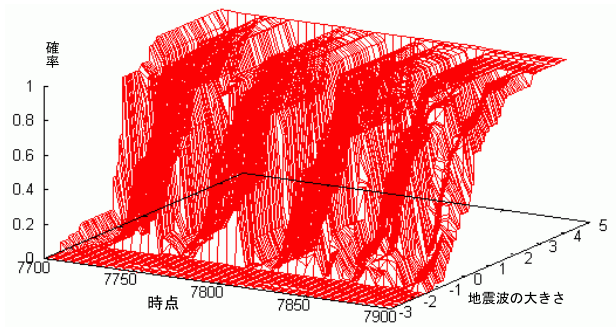


図 3: 深部低周波地震の条件付分布

地震は通常の地震に比べて周期が長いという特徴があり、条件付分布の推定結果はその特徴を捉えている。

## 5 まとめと今後の課題

KM<sub>2</sub>O-ランジュヴァン方程式論に基づく非線形予測公式を用いて、モデルを仮定せずに時系列の条件付分布を推定する方法を提案し、その手法の実証解析及び応用についての考察を行った。その結果、決定性の高い時系列においては、本手法による推定は好結果となった。また、深部低周波地震の S 波の到達後のみ、条件付分布が規則的に変化する様子が確認できた。

課題点として、条件付分布関数は連続性や滑らかさを持つほうが自然であるため、階段関数以外での補間を試す必要がある。また、条件付分布関数のダイナミクスのグラフが持つ意味をもっと汲み取ることができれば、その背後にある確率過程に関する情報を得られるのではないかと考えられる。

## 参考文献

- [1] 岡部靖憲, 『時系列解析における揺動散逸原理と実験数学』 日本評論社 2002 年
- [2] 岡部靖憲, 『実験数学—地震波, オーロラ, 脳波, 音声の時系列解析—』 朝倉書店 2005 年
- [3] 西富一平, 武尾実, ”栃木県西部地域モホ面付近に発生する低周波地震の活動とその発震機構” 火山, 第 41 巻 (1996), 第 2 号, 43-59 頁