修士論文発表

2 項ボラティリティ変動モデルと ヨーロピアン・オプション

指導教員　岡部 靖憲 教授

2006 年 2 月 8 日（水）

数理情報学専攻　藤原 晴雄

1　概要

オプション研究は 1973 年の F. Black and M. Sholes による Black-Sholes Model に代表されるように, 近年, 数多くの研究がなされてきており, とりわけオプションのプライシングに関する研究は大きな関心の的であった. 特に, 連続時間における研究は盛んに行なわれ, リスク中立確率測度の一意性とヘッジポートフォリオの組成可能性は等価であることが知られている. 一方で, 離散時間におけるこの性質の研究はあまり行なわれておらず, 研究の余地のある分野である.

離散時間において株価がボラティリティ一定の 2 項モデルに従うとした場合, リスク中立確率測度の一意性と, オプションをヘッジするようなセルフファイナンシングなヘッジポートフォリオの存在は等価であった. また, これより, オプションのプライシングを行なうことが可能であった.

そこで, 本論文ではボラティリティおよび期待収益率が変動するように拡張された 2 項モデルを考え, 株価がそれに従う場合のリスク中立確率測度の存在とヘッジポートフォリオの構成について考える. 本モデルの特徴は, 2 項モデルにおいてボラティリティと期待収益率を柔軟に定式化できる点であり, オプションのプライシングを行う上で, 様々なモデルを組み込むことが可能な点である.

2　ヨーロピアン・オプション

本論文ではヨーロピアン・コール・オプションを扱う. ヨーロピアン・オプションは権利を将来の決められた期日 (満期) でのみ行使できるようなオプションであり, 時刻 n における株価を S_n, 行使価格 K, 満期 N とすれば, ヨーロピアン・コール・オプションの満期におけるペイオフは次のようになる.

$$C_T = \max(S_N - K, 0)$$

3　2 項ボラティリティ変動モデル

モデルの表現

株価の確率過程 $(S_n; 0 \le n \le N)$ において, S_n の上昇率と下降率が時刻とともに変動するように拡張された 2 項モデルを考えたい. 可測空間を

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv \{0,1\}^N = \{(\omega_1, \ldots, \omega_N); \omega_n = 0, 1\}, \\ \mathcal{F} &= 2^\Omega \end{aligned}$$

で定め, 各 $n (1 \le n \le N)$ に対して, 関数 $z_n \colon \Omega \to \{0,1\}$ を次のように定義する:

$$\begin{array}{cccccc} z_n\colon & \Omega & \to & \{0,1\} & & (1 \le n \le N). \\ & \uplus & & \uplus & & \\ & (\omega_1, \ldots, \omega_N) & \to & \omega_n & & \end{array}$$

確率測度 P を $\{0,1\}$ 上の確率測度 μ_p の N 個の直積とする.

$$\begin{aligned} P &\equiv \mu_p \times \cdots \times \mu_p, \\ \mu_p(\{1\}) &\equiv p \quad , \quad \mu_p(\{0\}) \equiv 1 - p. \end{aligned}$$

このとき, $\{z_n; 1 \le n \le N\}$ は確率測度 P のもとで独立となり,

$$\begin{cases} P(z_n = 1) = p, \\ P(z_n = 0) = 1 - p \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, 株価 $S_n \colon \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$S_n = S_{n-1} \exp(u_{n-1} z_n + d_{n-1}(1 - z_n)) \qquad (1 \le n \le N)$$

と定め, 上式に従う確率過程 $S = (S_n; 0 \le n \le N)$ を 2 項ボラティリティ変動確率モデルと呼ぶ. ただし, $S_0 = s(> 0)$. とする. またフィルトレーション $(\mathcal{F}_n; 0 \le n \le N)$ をここで次のように定める：

$$\mathcal{F}_n \equiv \sigma(S_0, \cdots, S_n)$$

$\mathcal{F}_0$は自明. 即ち $^\forall A \in \mathcal{F}_0,\ P(A) = 0$ or 1が成り立つ.

対数期待収益率とボラティリティ

確率過程 $\vec{S} = (S_n; 0 \le n \le N)$ に対して, 期待収益率を次のように定義する.

$$\begin{aligned} E\left[\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) | \mathcal{F}_{n-1}\right] &= p u_{n-1} + (1-p) d_{n-1} \\ &\equiv \mu_{n-1} \end{aligned}$$

また, ボラティリティを次のように定義する.

$$\begin{aligned} E\left[\left\{\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) - \mu_{n-1}\right\}^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right] &= p(1-p)(u_{n-1} - d_{n-1})^2 \\ &\equiv \sigma_{n-1}^2 \end{aligned}$$

これより, 株価の up 項と down 項 u_{n-1}, d_{n-1} は $\mathcal{F}_{n-1}$-可測であり, μ_{n-1}, σ_{n-1} の式で表せる:

$$u_{n-1} = \mu_{n-1} + \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma_{n-1}$$

$$d_{n-1} = \mu_{n-1} - \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma_{n-1}$$

ボラティリティと収益率の定式化

本モデルではボラティリティσ_n および期待収益率 μ_n が 1 期前の σ_{n-1}, μ_{n-1} と z_n に依存するような場合を考える．すなわち，$\sigma_n, \mu_n (0 \leq n \leq N)$ は $\mathcal{F}_n$-可測であり，

$$\sigma_n = \exists g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, z_n)$$

$$\mu_n = \exists h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, z_n)$$

なる形で表せるとする．

4 ヨーロピアン・オプションのヘッジポートフォリオ

本論文では原資産である株価が 2 項ボラティリティ変動モデルに従うとし，ヘッジポートフォリオの構成について議論する．ヨーロピアン・オプションをヘッジするセルフ・ファイナンシングなポートフォリオが存在するとき，ポートフォリオとその価値は補題 2, 補題 3 によって一意に決まる．逆に，ポートフォリオの価値が補題 2, 補題 3 より構成されるポートフォリオは満期時点にヨーロピアン・オプションをヘッジするセルフ・ファイナンシングなポートフォリオとなることもわかる．このことより，無裁定性理論に基づいて公正なオプションの価格を評価することができる．また，2 項ボラティリティ変動モデルにおいても，リスク中立確率測度 Q の存在と一意性が示される．

補題 1

ポートフォリオの価値 $(V_n; 0 \leq n \leq N)$ は，$\mathbf{R}$ 上のあるボレル関数 f_n を用いて次の形で表せる．

$$(*)_n \quad V_n = f_n(\sigma_n, \mu_n, S_n)$$

補題 2

ポートフォリオの価値 f_n は次の漸化式で唯一決まる．

$$\begin{aligned} & f_{n-1}(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, S_{n-1}) \\ = e^{-r}\Big\{ & q_{n-1} f_n(g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 1), h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 1), \\ & S_{n-1}e^{u_{n-1}}) + (1-q_{n-1}) f_n(g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 0), \\ & h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 0), S_{n-1}e^{d_{n-1}}) \Big\} \end{aligned}$$

$$q_{n-1} \equiv \frac{e^r - e^{d_{n-1}}}{e^{u_{n-1}} - e^{d_{n-1}}}$$

補題 3

ポートフォリオ (ξ_{n-1}, η_{n-1}) は次の式で決まる:

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} &= \frac{f_n(g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 1), h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 1), S_{n-1}e^{u_{n-1}})}{S_{n-1}(e^{u_{n-1}} - e^{d_{n-1}})} \\ &\quad - \frac{f_n(g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 0), h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 0), S_{n-1}e^{d_{n-1}})}{S_{n-1}(e^{u_{n-1}} - e^{d_{n-1}})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{n-1} &= \frac{f_n(g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 0), h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 0), S_{n-1}e^{d_{n-1}})}{e^{-u_{n-1}} B_n(e^{u_{n-1}} - e^{d_{n-1}})} \\ &\quad - \frac{f_n(g(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 1), h(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, 1), S_{n-1}e^{u_{n-1}})}{e^{-d_{n-1}} B_n(e^{u_{n-1}} - e^{d_{n-1}})} \end{aligned}$$

リスク中立確率測度

離散時間の Girsanov の定理により，P と絶対連続なリスク中立確率測度 Q が一意に存在することが示され，Q のもとで

$$\begin{cases} Q(z_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}) = q_{n-1}, \\ Q(z_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1 - q_{n-1} \end{cases}$$

が成立する．これより，

$$f_{n-1}(\sigma_{n-1}, \mu_{n-1}, S_{n-1}) = e^{-r} E^Q[f_n(\sigma_n, \mu_n, S_n) | \mathcal{F}_{n-1}]$$

となり，相対価格プロセス $\frac{V_n}{B_n} (1 \leq n \leq N)$ は確率測度 Q のもとでマルチンゲールとなる．よって時点 $n = 0$ におけるオプションの価格は以下のように評価できる:

$$V_0 = E^Q\left[e^{-Nr} V_N\right]$$

5 今後の課題

経路依存型オプションについても同じことが言えるかどうか，といったことが挙げられる．

6 参考文献

[1] F. Black and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, 81:637-58, 1973.

[2] J. C. Cox and M. Rubinstein, Option Markets, Prentice Hall, 1985.

[3] 岡部靖憲,「確率過程論」 東京大学大学院 情報理工学系研究科数理情報学専攻 夏期講義, 2005.

[4] 渡部敏明,「ボラティリティ変動モデル」, 朝倉書店, 2004.

など．