

円ボロノイ図の厳密計算法に関する研究

数理情報学第5研究室 修士2年 田中快明

指導教員 杉原厚吉 教授

平成18年2月7日

1 本研究の概要

円ボロノイ図とは円を生成元として作成したボロノイ図である [2] . 円ボロノイ図の逐次添加による構成アルゴリズムを考えた際に最も重要になるのが, ボロノイ頂点を形成する3円が共通に外側から接する円に対して新しく追加する円が共通部分を持つかどうかという判定である. 本研究ではこの判定を行う方法を考え, 厳密計算法を適用したとき必要となる精度を見積もる事を行った. 本研究で提案する手法では, 3円に共通に外側から接する円が2つ存在する場合に必要な精度は, この共通に外側から接する円が1つしか存在しない場合に必要な精度と比べて非常に大きいものになってしまっている.

2 定義

中心 p , 半径 r の円を $\{p, r\}$ と表す. 円 $P_i = \{p_i, r_i\}, i = 1, \dots, n$, の円ボロノイ図は次式で表されるボロノイ領域 $V_i, i = 1, \dots, n$, の集合であるとする.

$$V_i = \{p \in \mathbf{R}^2 | d(p, p_i) - r_i < d(p, p_j) - r_j, i \neq j\}. \quad (1)$$

本研究ではボロノイ頂点を形成する3円と添加される新しい円との関係のみに着目するので, 3円の添え字を1,2,3, 添加する円の添え字を4とする. また, 4番目の円が最小である, すなわち, $r_4 \leq r_1, r_2, r_3$ であると仮定する. 3円 $P_i = \{p_i, r_i\}, i = 1, 2, 3$, に対して次の2つの特別な円を定義する.

図1(a)のように3円 P_1, P_2, P_3 が円 $P_0 = \{p_0, r_0\}$ に外側から接しているとき, 円 P_0 を円 P_1, P_2, P_3 の共通内接円と呼ぶ. また, 図1(b)のように円 $P_s = \{p_s, r_s\}$ に内側から接しているとき, 円 P_s を円 P_1, P_2, P_3 の共通外接円と呼ぶ.

3円 P_1, P_2, P_3 およびその共通内接円 P_0 と共通外接円 P_s に対して, 次の変換を施した後のパラメータを'をつけて表す.

$$x'_i = x_i - x_4, y'_i = y_i - y_4, r'_i = r_i - r_4, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$x'_0 = x_0 - x_4, y'_0 = y_0 - y_4, r'_0 = r_0 + r_4, \quad (3)$$

$$x'_s = x_s - x_4, y'_s = y_s - y_4, r'_s = r_s - r_4. \quad (4)$$

この変換は4番目の円 P_4 が原点へ縮小するようにパラメータを変更する変換である. 共通内接円と共通外接円に関しては,

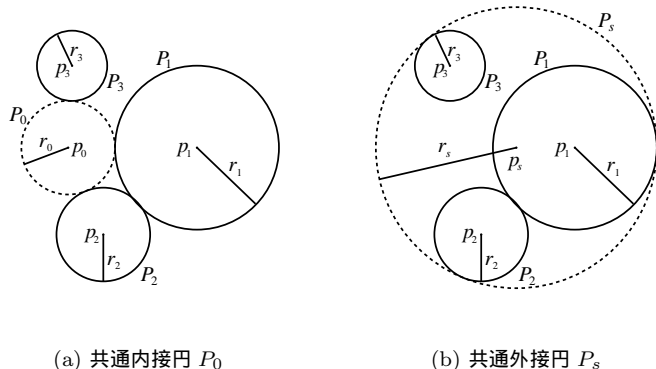


図1: 3円 $P_i = \{p_i, r_i\}, i = 1, 2, 3$, に対する (a) 共通内接円 $P_0 = \{p_0, r_0\}$, および (b) 共通外接円 $P_s = \{p_s, r_s\}$. 実線が3円を, 点線がその3円による共通内接円または共通外接円を表す.

変換後も他の円と接している状態を保つように半径の変換を与える.

3 判定法

以下の3つの関数を判定に利用する.

$$F = A_1^2 + A_2^2 - A_3^2, \quad (5)$$

$$R = A_3/2A, \quad (6)$$

$$L(x, y) = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & r_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r_3 \\ 1 & x & y & r_4 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

ここで,

$$A = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & r'_1 \\ x'_2 & y'_2 & r'_2 \\ x'_3 & y'_3 & r'_3 \end{vmatrix}$$

であり, A_i は A を定める行列の第 i 列を $(w'_1, w'_2, w'_3)^T$ で置き換えた行列の行列式である. また, $w'_i = (x'_i)^2 + (y'_i)^2 - (r'_i)^2, i = 1, 2, 3$, である.

各関数はそれぞれ次のような性質を持っている. 関数 F は (i)4番目の円が3円の共通内接円に外側から接している場合

[1], (ii)4番目の円が3円の共通外接円に内側から接している場合の2つの場合で0になる関数である．このうち(i)の場合は，3円の共通内接円に新しく添加する円が接するという境界になる重要な状況であるが，(ii)はまったく関係ない場合である．関数 R は前述の $F = 0$ となる2つの場合に対して，(i)の場合は $R > 0$ ，(ii)の場合は $R < 0$ となる関数である．

3.1 共通内接円と外接円が1つずつある場合

共通内接円と共通外接円が1つずつある場合，変換を施した後の様子は図2(a)の通りとなる．このとき $L(x, y) = 0$ で表される直線 l に対して，3円 P_1, P_2, P_3 は同じ側に存在する．直線 l に対してこの3円と同じ側では外側に共通外接円，内側に共通内接円が存在する．一方，反対側では外側に共通内接円，内側に共通外接円となる．これと，関数 F と R の符号を参考にすることにより4番目の円が他の3円の共通内接円と交わるかどうか判定する条件が得られる．4番目の円が直線 l に対して3円と同じ側にあるとき，条件は次の通りになる．

$$F < 0, \text{ かつ } R > 0. \quad (8)$$

一方，3円と反対側にあるときは，条件は次の通りとなる．

$$F > 0, \text{ または } (F \leq 0 \text{ かつ } R < 0). \quad (9)$$

よって，関数 $L(x, y)$ を用いて上述の2つの場合を判定した後，関数 F と R の符号を調べることで判定が行える．

この判定に必要な精度は次の通り見積ることができる．

$$-M \leq x_i, y_i, r_i \leq M \quad (10)$$

とすると，関数 F が最も精度を必要とし，

$$|F| < 2^{16} M^8 \quad (11)$$

である．

3.2 共通内接円が2つある場合

共通内接円が2つある場合，変換後の様子は図2(b)の通りとなる．この場合直線 l と平行な方向に4番目の円と同じ半径を持つ円を動かし，4番目の円の両側に零点が何個あるかということ調べれば判定することができる．これは4番目の円の中心 (x_4, y_4) を(12)式の値に変えて得られる関数 $F_Q(t)$ の区間 $(-\infty, 0)$ および $(0, +\infty)$ における零点の数を調べることで知ることができる．

$$\left(- \left| \begin{array}{ccc} x_1 & 1 & r_1 \\ x_2 & 1 & r_2 \\ x_3 & 1 & r_3 \end{array} \right| t + x_4, \left| \begin{array}{ccc} 1 & y_1 & r_1 \\ 1 & y_2 & r_2 \\ 1 & y_3 & r_3 \end{array} \right| t + y_4 \right). \quad (12)$$

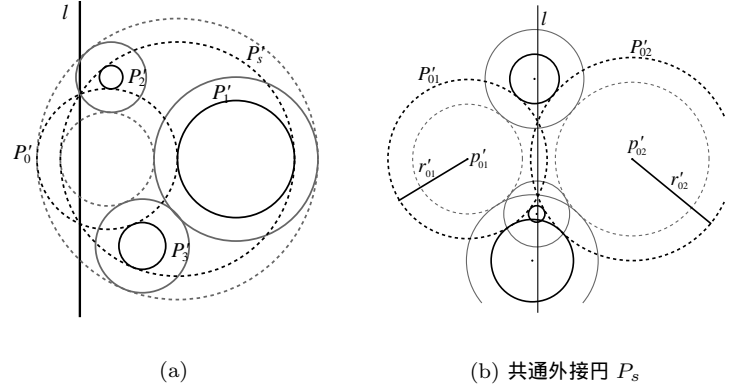


図2: (a) 共通内接円と共通外接円が1つずつ存在した場合，(b) 共通内接円が2つ存在した場合，の各場合における変換後の様子．

この方法に必要な精度は次の通り莫大になってしまう．(10)式のように定めると，判定の過程で最も精度が必要となる項は，

$$(\text{精度が最も必要な項}) \sim \frac{M^{416}}{M^{408}} \quad (13)$$

である．

4 まとめと今後の課題

本研究では，ポロノイ頂点を形成する3円の共通内接円に対して添加する円が交わっているかどうか判定する判定法の流れについて述べた．この判定は，円ポロノイ図の逐次添加による構成アルゴリズムを考えた際に，最も重要となる判定である．また，この判定を行うのに必要な精度の見積もりを行った．

今後の課題として，共通内接円が2つ存在する場合のより必要精度が低い判定法の構築が挙げられる．現在の手法は非常に大きい精度が必要になっている．共通内接円と共通外接円が1つずつある場合は入力の8倍程度の精度で済むので，より必要精度の低い判定法を考える必要がある．

参考文献

- [1] M. L. Gavrilova and J. Rokne: Updating the topology of the dynamic Voronoi diagram for spheres in Euclidean d -dimensional space. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 20 (2003), pp. 231–242.
- [2] A. Okabe, B. Boots and K. Sugihara: *Spatial Tessellations – Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. John Wiley and Sons, 1992.