修士論文審査資料

巡回トーナメント問題の発見的解法

指導教員　松井　知己　助教授
数理情報学専攻数理第五研究室　藤原　伸友

平成 18 年 2 月 8 日

1　概要

本論文では各チームの本拠地間の距離が 1 であるような巡回トーナメント問題に対して，最適値の下界を評価し，許容解の構成法を 2 つ提案する．1 つ目はポリゴン法を改訂した構成法で，質の良い許容界を非常に高速に構成することができる．2 つ目は整数計画法を用いた構成法で，チーム数が 22，28, 34, 40, 46 の場合には最適解を構成できる．

2　問題の定義

本稿では以下の条件でリーグ戦が行われるとする:

- チーム数は偶数 (以下 n) である．
- 各チームは異なる本拠地 (ホーム) をもつ．
- 各試合は対戦する 2 チームのどちらかの本拠地で行われる．
- 対戦相手の本拠地での試合が連続するときは，対戦相手の本拠地に直接移動する．
- 各チームは自チームの本拠地からリーグ戦を開始し，終了したら自チームの本拠地に戻る．

次のようなリーグ戦の形式を 1 重総当りリーグ戦という:

- 各チームは他の $n-1$ チームと 1 回ずつ対戦する．
- 全てのチームが 1 節に 1 回対戦し，$n-1$ 節でリーグ戦は終了する．

次のようなリーグ戦の形式を 2 重総当りリーグ戦という:

- 各チームは他の $n-1$ チームと 2 回ずつ対戦する．
- 各チーム対はそれぞれの本拠地で 1 回ずつ対戦する．
- 全てのチームが 1 節に 1 回対戦し，$2(n-1)$ 節でリーグ戦は終了する．

距離行列 D とは，行と列がチームの集合でインデックスされ，t 行 t' の要素 $d(t,t')$ はチーム t と t' の本拠地間の距離を表し，$d(t,t)=0$ である行列である．2 重総当りリーグ戦のスケジュールが与えられたとき，チーム t の移動距離とは，スケジュールに従って対戦相手の本拠地を巡回したときの経路の長さである．スケジュールの移動距離とは各チームの移動距離の総和である．巡回トーナメント問題とは Easton, Nemhauser, Trick [1] により提唱された問題で次のように記述される．

問題 1 巡回トーナメント問題

入力　チームの集合 $T=\{1,\ 2,\dots,n\}$, (n は偶数) と各チームの本拠地間の距離行列 D.

出力　以下の制約条件を満たす 2 重総当りリーグ戦のスケジュールで，各チームの移動距離の総和が最小のもの．

1 (No repeat)　同じ対戦相手と連続する節で対戦してはならない．

2 (At most)　4 節以上ホームゲームまたはアウェイゲームが連続してはならない．

TTP の許容解であるスケジュールを許容スケジュールと呼ぶ．我々は Urrutia, Ribeiro[3] により提案された各チームの本拠地間の距離が 1 であるような巡回トーナメント問題 (CTTP) を扱う．TTP の制約を満たすスケジュール Y の移動距離を $w(Y)$ と表す．CTTP において，$w(Y)$ は移動回数と等しくなる．

スケジュールが与えられたとき，チーム t がスロット $s-1$ と s においてホーム (アウェイ) ゲームを連続して行うとき，チーム t はスロット s にブレークを持つという．スケジュール Y のブレーク数を，各チームのブレーク数の総和と定義し $b(Y)$ と表す．2 重総当りリーグ戦のスケジュール Y の移動回数とブレーク数の間には，

$$w(Y)=2n(n-1)-\frac{b(Y)}{2} \tag{1}$$

という関係があることが容易に導ける．

従って，CTTP はブレーク数を最大にするような許容解を見つける問題と本質的に等価である．以後ブレーク数最大化についての議論を行う．

3　ブレーク数の上界

補題 1 任意の許容スケジュールのブレーク数は以下で定められる UB(n) 以下である．

$$\mathrm{UB}(n)=\begin{cases}(4/3)n^2-2n & (n\equiv 0 \pmod 3 \text{ のとき}),\\ (4/3)n(n-1)-(n-2) & (n\equiv 1 \pmod 3 \text{ のとき}),\\ (4/3)n(n-2) & (n\equiv 2 \pmod 3 \text{ のとき}).\end{cases}$$

略証: $n\equiv 1 \pmod 3$ の場合について考える．スロットの数は $2(n-1)\equiv 0 \pmod 3$ である．明らかに各チームは高々 $(2/3)2(n-1)=(4/3)(n-1)$ 個のブレークしか持ち得ない．また，高々 2 チームしか $(4/3)(n-1)$ 個のブレークをもつことはできないことが容易に示せる．従って任意の許容スケジュールのブレーク数は,

$$2(4/3)(n-1)+(n-2)(4/3)(n-1)-1=(4/3)(n-1)-(n-2)$$

以下である．■

$n\in\{0,2\} \pmod 3$ の場合についても同様にして示すことができる．

4　ポリゴン法を用いた構成法

1 重総当りリーグ戦のスケジュールから 2 重総当りリーグ戦のスケジュールを次のように構成する．

構成法 1　$n \equiv 1 \pmod 3$ の場合

1. 1 重総当りリーグ戦のスケジュール X を構成する．
2. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, (n-1)/3\}$ に対して，X の部分スケジュール X_i が，スロット $(3i-2, 3i-1, 3i)$ からなるように X を分割する．
3. X_i のホームアウェイを反転させた部分スケジュールを $\overline{X}$ とし，X_iと$\overline{X}_i$ を以下のように接続して 2 重総当りリーグ戦のスケジュール Y を構成する．

$$Y = (X_1, \overline{X}_1, \overline{X}_2, X_2, X_3, \overline{X}_3, \ldots, \overline{X}_{(n-1)/3}, X_{(n-1)/3}).$$

定理 2 許容スケジュール Y で，

$$b(Y) = \begin{cases} \mathrm{UB}(n) - ((2/3)n - 2) & (n \equiv 0 \pmod 3), \\ \mathrm{UB}(n) - (2/3)(n-1) & (n \equiv 1 \pmod 3), \\ \mathrm{UB}(n) - (5/3)(n-2) & (n \equiv 2 \pmod 3), \end{cases}$$

であるものが存在する．

構成法 1 において，1 重総当りリーグ戦 X をポリゴン法を改訂した方法をもちいて構成することで，定理 2 の許容スケジュールを構成することができる．

5　整数計画法を用いた構成法

1 重総当りリーグ戦のスケジュールから 2 重総当りリーグ戦のスケジュールを次のように構成する．

構成法 2　$n \equiv 1 \pmod 3$ の場合

1. 1 重総当りリーグ戦のスケジュール X を構成する．
2. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, (n-1)/3\}$ に対して，X の部分スケジュール X_i が，スロット $(3i-2, 3i-1, 3i)$ からなるように X を分割する．
3. X_i のホームアウェイを反転させた部分スケジュールを $\overline{X}$ とし，X_iと$\overline{X}_i$ を以下のように接続して 2 重総当りリーグ戦のスケジュール Y を構成する．

$$Y = (X_1, \overline{X}_1, X_2, \overline{X}_2, X_3, \overline{X}_3, \ldots, , X_{(n-1)/3}, \overline{X}_{(n-1)/3}).$$

$n \in \{0, 2\}$ の場合もほぼ同様の手続きにより構成する．

定理 3 チーム数 n が $16 \le n \le 46$ の許容スケジュール Y で，

$$b(Y) = \begin{cases} \mathrm{UB}(n) - (n-2) & (n \equiv 0 \pmod 3), \\ \mathrm{UB}(n) & (n \equiv 1 \pmod 3), \\ \mathrm{UB}(n) - (n-2) & (n \equiv 2 \pmod 3), \end{cases}$$

であるものが存在する．

略証:$n \equiv 1 \pmod 3$ の場合を示す．X を (B1) $b(X) = n-2$，(B2) スロット $s \in \{3, 5, 0\} \pmod 6$ にちょうど 2 チームがブレークをもつような 1 重総当りリーグ戦のスケジュールとする．$n \in \{16, 22, 28, 34, 40, 46\}$ のとき，整数計画法を解くことにより，(B1), (B2) を満たすスケジュールが存在することを確認した．X の偶数スロットのホームアウェイを反転したスケジュールを X' とする．X' は 2 チームが $2(n-1)-1$ 個のブレークを持ち，残りの $n-2$ チームが $2(n-1)-2$ 個のブレークを持ち，全てのチームが $s > 1$，$s \equiv 1 \pmod 3$ なるスロット s にブレークを持つスケジュールである．この X' から構成法 2 を用いて 2 重総当りリーグ戦 Y' を構成する．Y が許容スケジュールであり，$b(Y) = (4/3)n(n-1) - (n-2)$ ことは容易に確認できる．■

$n \in \{0, 2\}$ の場合についても同様に示すことができる．

構成法 2 において，定理 3 の許容スケジュールを構成することができる．

6　結果

提案手法の結果を表 1 にまとめる．

表 1　チーム数 $16 \le n \le 46$ の問題に対する結果.

n	移動回数				ブレーク数		
	最良解	LB(n)	定理 2	定理 3	UB(n)	定理 2	定理 3
16	327	327	332	*327	306	296	306
18	418	414	419	426	396	386	380
20	521	520	535	529	480	450	462
22	632	626	633	*626	596	582	596
24	757	744	751	755	720	706	698
26	—	884	904	896	832	792	808
28	—	1021	1030	*1021	982	964	982
30	—	1170	1179	1184	1140	1122	1112
32	—	1344	1369	1359	1280	1230	1250
34	—	1512	1523	*1512	1464	1442	1464
36	—	1692	1703	1709	1656	1634	1622
38	—	1900	1930	1918	1824	1764	1788
40	—	2099	2112	*2099	2042	2016	2042
42	—	2310	2323	2330	2268	2242	2228
44	—	2552	2587	2573	2464	2394	2422
46	—	2782	2797	*2782	2716	2686	2716

n: チーム数.
known:[2] に公開されている最良解の値, 2006 年 2 月現在.
*: 下界 LB(n) を達成した解.

参考文献

[1] K. Easton, G. L. Nemhauser and M. A. Trick: The traveling tournament problem: description and benchmarks, *Lecture Notes in Computer Science*, 2239 (2001), Springer, 580–585.

[2] M. Trick: Challenge traveling tournament problem, Web Page. http://mat.gsia.cmu.edu/TOURN/, 2006.

[3] S. Urrutia and C. C. Ribeiro: Maximizing breaks and bounding solutions to the mirrored traveling tournament problem, *Discrete Applied Mathematics* (to appear).