位相優先法を用いたモデル予測制御系設計法の数値誤差対策

数理第3研究室 齋木 直也
指導教員 大石 泰章 講師

2006年2月6日

1 概要

制約条件付きシステムのモデル予測制御が，線形制約パラメトリック凸2次計画問題として定式化できること，および，最適解が区分的アフィン関数となることが知られている．本論文では，最適解の区分を表すパラメータ領域の性質を考察し，領域を求めるアルゴリズムを提案した．従来の領域を求めるアルゴリズムは，数値情報のみに依存したアルゴリズムであったために，数値誤差により破綻してしまうため，多くの例外処理であった．

本論文では，位相優先法を用い，同最適化問題における隣接領域の関係を導き，その位相的性質をもとにしたグラフ構造を考えることで，数値誤差や例外による破綻のないアルゴリズムを設計した．

2 線形制約パラメトリック凸2次計画問題

次のような，パラメータ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ を含む線形制約凸2次計画問題を考える．

$$\underset{\mathbf{z}}{\text{minimize}} \quad \{\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top H\mathbf{z} \mid G\mathbf{z} \le \mathbf{w} + S\mathbf{x}\}. \tag{1}$$

ただし，$H \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$G \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$. $S \in \mathbb{R}^{m\times n_x}$ である．また，$H \succ O$ である．ここで，添字集合 $J := \{1, 2, \dots, m\}$ を定義する．

まず，$G\mathbf{z} \le \mathbf{w} + S\mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{z}$ が存在するような $\mathbf{x}$ を取って固定し，この最適化問題の性質を考える．

目的関数は強凸関数であり，最適解は存在して一意である．また，次が成り立つ．

定理 1. $\mathbf{z}$ が最適化問題 (1) の最適解である必要十分条件は，

$$\begin{aligned}&H\mathbf{z} + G^\top\lambda = 0,\\&\lambda_j(\mathbf{g}_j^\top z - w_j - \mathbf{s}_j^\top x) = 0 \quad (\forall j \in J)\\&G\mathbf{z} \le \mathbf{w} + S\mathbf{x}, \quad \lambda \ge 0\end{aligned}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}^m$ が存在することである．

定理1を Karush–Kuhn–Tucker 条件（以下，KKT 条件），上式を満たす λ を Lagrange 乗数という．

次に，$\mathbf{x}$ を動かすことを考える．まず，$G\mathbf{z} \le \mathbf{w} + S\mathbf{x}$ をみたす $\mathbf{z}$ が存在するような $\mathbf{x}$ の集合を求める．このような集合を $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ と書くと，次のように表すことができる：

$$\mathscr{X} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \exists\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,\ G\mathbf{z} \le \mathbf{w} + S\mathbf{x}\}.$$

$\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n_x}$ を，

$$\mathscr{C} := \{(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n_x} \mid \begin{pmatrix}G & -S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{x}\end{pmatrix} \le \mathbf{w}\}$$

と定義すれば，$\mathscr{X}$ は $\mathscr{C}$ の $\mathbb{R}^{n_x}$ への射影として表すことができる．したがって，$\mathscr{C}$ は凸多面体であるから，$\mathscr{X}$ も凸多面体となる．

定理1の条件 $\lambda_j(\mathbf{g}_j^\top\mathbf{z} - w_j - \mathbf{s}_j^\top\mathbf{x}) = 0$ $(j \in J)$ は，

$$\lambda_j = 0\ ,\ \text{または}\ \mathbf{g}_j^\top\mathbf{z} = w_j + \mathbf{s}_j^\top\mathbf{x} \quad (\forall j \in J)$$

であることを意味する．特に，ある添字集合 $A \subseteq J$ を考えたとき，対応する最適解 $\mathbf{z}$ と Lagrange 乗数 λ に関して，

$$\mathbf{g}_j^\top\mathbf{z} = w_j + \mathbf{s}_j^\top\mathbf{x} \quad (\forall j \in A), \quad \lambda_j = 0 \quad (\forall j \in A^c)$$

となるような $\mathbf{x}$ の集合を $R(A)$ と書く．ただし，A^c は A の J に対する補集合を表す．また，添字集合 $A \subseteq J$ の表す行を G, $\mathbf{w}$, S, λ から抜き出して構成した行列・ベクトルを，G_A, $\mathbf{w}_A$, S_A, λ_A と書くことにする．

定理1より，$\mathbf{x} \in R(A)$ であるとは，

$$\begin{aligned}&H\mathbf{z} + G^\top\lambda = 0, \quad G_A\mathbf{z} = \mathbf{w}_A + S_A\mathbf{x}, \quad \lambda_{A^c} = 0,\\&G\mathbf{z} \le \mathbf{w} + S\mathbf{x}, \quad \lambda \ge 0\end{aligned}$$

を満たす $\mathbf{z}, \lambda$ が存在することである．

一般に $A \ne B$ $(A, B \subseteq J)$，かつ $\{\mathbf{g}_j \mid j \in A\}$，$\{\mathbf{g}_j \mid j \in B\}$ が線形独立であれば，$R(A) \cap R(B)$ は内点を持たない．ここで，次の定理が成り立つ．

定理 2.

$$\bigcup_{A\subseteq J} R(A) = \mathscr{X}.$$

よって，$\forall A \subseteq J$ に対し，$\{\mathbf{g}_j \mid j \in A\}$ が線形独立であれば $R(A)$ は $\mathscr{X}$ の分割になる．

定理 3. $\mathbf{x} \in R(A)$ のとき，A の部分集合 B で $\mathbf{x} \in R(B)$, $|B| \le n$ であり，かつ $\{\mathbf{g}_i \mid i \in B\}$ が線形独立であるものが存在する．

以上より $|A| \le n$ なる A を考えて和集合を取ると，$\mathscr{X}$ になる．すなわち，

$$\bigcup_{|A|\le n} R(A) = \mathscr{X}$$

が成り立つ．以下，$R(A)$ を $\mathscr{X}$ の領域，あるいは単に領域という．

3 隣接する領域の関係

隣接する領域間の関係を探るため，パラメータ $\mathbf{x}$ の次元を上げて考える．

問題 (1) に対し，制約式の右辺をパラメータ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{Nn_u}$ でおきかえた次の最適化問題を考える：

$$\underset{\mathbf{z}}{\text{minimize}}\{\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top H\mathbf{z} \mid G\mathbf{z} \le \mathbf{y}\}.$$

ただし，$H \succ 0$ である．また $n_y := Nn_u$ とおく．

$G\mathbf{z} \le \mathbf{y}$ を満たす $\mathbf{z}$ が存在するような $\mathbf{y}$ の集合を求める．このような集合を $\mathscr{Y} \subseteq \mathbb{R}^{n_y}$ と書くと，$\mathscr{X}$ と同様に $\mathscr{Y}$ は凸多面体となる．

ここで，$\mathscr{Y}$ での領域 $R_y(A)$ を $R(A)$ と同様に次のように定義する．

定義 1. 次を満たす $\mathbf{z}$ と λ が存在するような $\mathbf{y}$ の集合を $R_y(A)$ と書く：

$$\begin{aligned}&H\mathbf{z} + G^\top\lambda = 0, \quad G_A\mathbf{z} = \mathbf{y}_A, \quad \lambda_{A^c} = 0,\\&G\mathbf{z} \le \mathbf{y}, \quad \lambda \ge 0.\end{aligned}$$

要素数 n 以下の添字集合だけを考えれば $\mathscr{Y}$ 全体を覆うことができる．すなわち，$|A| \leq n$ なる $\forall A \subseteq J$ に対して，

$$\bigcup_{|A| \leq n} R_y(A) = \mathscr{Y}$$

が成り立つ．

また，このとき $\{g_i \mid i \in A\}$ が線形独立なら，領域 $R_y(A)$ は，

$$-(G_A H^{-1} G_A^\top)^{-1} \mathbf{y}_A \geq 0,$$
$$G_{A^c} H^{-1} G_A^\top (G_A H^{-1} G_A^\top)^{-1} \mathbf{y}_A \leq \mathbf{y}_{A^c}$$

と求めることができる．特に，$R_y(A)$ は凸多面体である．ここで，以下の定理が成り立つ．

定理 4. $|A| \leq n$ なる $\forall A \subseteq J$ に対し，$R_y(A) \neq \emptyset$ である．

また，隣接する領域の添字集合の関係について，以下の定理が成り立つ．

定理 5. 隣接する 2 つの領域の添字集合を，A，$B \subseteq J$ $(|A| < |B| \leq n)$ とする．ここで，$\{\mathbf{g}_j \mid j \in A\}$，$\{\mathbf{g}_j \mid j \in B\}$ は線形独立とする．また，$k = |A|$ とおく．このとき，A，B に含まれる添字を適当に付け替えることで，次の関係が成り立つ：

$$A = \{1, 2, \ldots, k\}$$
$$B = \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$$

定理 6. 隣接する 2 つの領域の添字集合を，A，$B \subseteq J$ $(|A| = |B| = n)$ とする．このとき，$\{\mathbf{g}_i \mid i \in A\}$，$\{\mathbf{g}_i \mid i \in A\}$ はそれぞれ線形独立とする．A，B に含まれる添字を適当に付け替えることで，次の関係が成り立つ：

$$A = \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$B = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, n+1\}$$

4 アフィン集合との共通部分

本節では，$\mathscr{Y}$ と $\mathscr{X}$ の関連性に注目し，$\mathscr{Y}$ における位相的性質から，$\mathscr{X}$ における位相的性質を抽出することを考える．

n_x 次元アフィン集合 $\mathscr{A}$ を次式で定める：

$$\mathscr{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \mathbf{y} = \mathbf{w} + S\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}\}$$

このとき，$\mathscr{Y}, \mathscr{X}$ の関係，およびそれぞれにおける領域の関係について，以下の定理が成り立つ．

定理 7. $\mathscr{X}$ は

$$\mathscr{X} = \mathscr{Y} \cap \mathscr{A}$$

として表すことができる．また，添字集合を A とし，A をもとに求められる $\mathscr{Y}$ の領域を $R_y(A)$，$\mathscr{X}$ の領域を $R(A)$ と表すと，

$$R(A) = R_y(A) \cap \mathscr{A}$$

が成り立つ．

次に，$\mathscr{Y}$ での隣接領域の添字集合の関連性に基づき，$\mathscr{X}$ における 2 つの領域の関係を考える．ここで，$A \neq B$ $(A, B \subseteq J)$ に対して，$\mathscr{Y}$ における領域 $R_y(A)$，$R_y(B)$ を考える．このとき，定理 7 より，

$$R(A) = R_y(A) \cap \mathscr{A}, \quad R(B) = R_y(B) \cap \mathscr{A}$$

なる関係が存在する．ここで，5.2 節の仮定より，$R_y(A)$，$R_y(B)$ および，$R(A)$，$R(B)$ について，以下の定理が成り立つ．

定理 8. $R_y(A)$，$R_y(B)$ が隣接していなければ，$R(A)$，$R(B)$ は隣接しない．

5 位相優先法に基づく退化の処理

5.1 線形独立性に関する退化

数値誤差のある計算環境では，$|A| \leq n,\ \forall A \subseteq J$ に対して，

$$\{\mathbf{g}_j \mid j \in A\}$$

が線形独立であると仮定できる．

なぜなら，複数のベクトルが線形従属であるか否かは，それらを並べて作った行列の行列式を数値計算によって調べればよいが，数値誤差のある環境では，その計算結果が信用できない．今，仮に行列式の値が 0 であったとしても，それは線形従属に非常に近い状況にあることが分かるのみで，線形従属であるかは判断できない．よって，計算機上では判断できない線形従属性を判断しようとすることなしにアルゴリズムを構成しなければならない．したがって，線形独立と仮定してアルゴリズムを構成してよい．

5.2 領域の位置関係に関する退化

数値誤差のある計算環境では，n 次元凸多面体と，m 次元アフィン集合の共通部分は，空集合であるか，m 次元凸多面体となると仮定できる $(m < n)$．

一般に，n 次元凸多面体と m 次元アフィン集合の共通部分は，空でなければ m 次元凸多面体となる．これが崩れるのは，アフィン集合が完全に凸多面体の面を含んでいる場合である． しかし，計算誤差のある環境では，完全に含んでいるかどうかの判定を行うことはできない．したがって，退化に対する処理も必要ない．

6 数値誤差を考慮したアルゴリズム

まず，$\mathscr{Y}$ における領域分割をグラフ表現することを考える．添字集合を頂点 V_y，隣接する領域を表す頂点を枝 E_y を結んだグラフ (V_y, E_y) を考える．定理 3,4 より，頂点 V_y は n 個までの添字集合を全て考えればよい．また，定理 5,6 の関係にある頂点間にのみ枝を張ればよい．

ついで，$\mathscr{X}$ における領域分割をグラフ表現することを考える．添字集合を頂点 V，隣接する領域を表す頂点を枝 E で結んだグラフを (V, E) 考える．定理 2 より，グラフ (V, E) は連結グラフになる．また，定理 7 より，グラフ (V, E) は，グラフ (V_y, E_y) の部分グラフになる．

よって，グラフ (V, E) を求めるには，グラフ (V_y, E_y) の連結な部分グラフを求めればよいことになる．また，グラフ (V, E) の各頂点が表す添字集合が分かれば，領域の不等式を得ることができる．したがって，グラフ (V, E) を求めれば十分である．提案手法は，幅優先探索を用いて，グラフ (V, E) を求めている．

このアルゴリズムにおいても，枝が部分グラフに含まれるかを判定するとき，数値誤差により判定誤りがおきる可能性がある．しかし，その場合でも本アルゴリズムは連結な部分グラフを出力し，正常に停止する．

7 結論

本研究では，モデル予測制御系設計問題を取り上げ，数値情報に依存せず解くことで，数値誤差に頑強なアルゴリズムを提案した．

参考文献

[1] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, Vol. 38, pp. 3–20, 2002.

[2] K. Sugihara and M. Iri. A robust topology-oriented incremental algorithm for Voronoi diagrams. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, Vol. 4, No. 2, pp. 179–228, 1994.