強連結有向グラフ上の整合円順列

松田 拓朗
指導教員: 岩田 覚 助教授

2006 年 2 月 8 日

1 要旨

強連結有向グラフの頂点はグラフの安定数以下の閉路で覆うことが出来るという Gallai (1964) の予想が，Bessy–Thomassé (2004) によって肯定的に解決された．彼らは，整合円順列という概念を提案し，円順列が整合的であるときに成り立つ最大最小定理の系として Gallai の予想を証明した．Sebő(2004) は整合円順列を求める多項式時間アルゴリズムを与えるとともに，整合円順列が与えられたグラフから最小費用流問題を解くことによって Gallai の予想を満たす安定集合と閉路被覆が得られることを示した．

本研究では，Knuth (1974) による強連結グラフの分解を用いて得られる結果から整合円順列を求める効率的なアルゴリズムが導かれることを示した．また，強連結グラフの耳分解を用いて整合円順列を求めるより高速なアルゴリズムを提案した．

2 Gallai の予想

Bessy–Thomassé は，整合円順列という概念を導入し，全ての有向グラフに整合円順列が存在することを示した．さらに，整合円順列が与えられた強連結グラフにおける最大最小定理を示し，そこから Gallai[2] の予想が正しいことを証明した．

定理 1（Bessy–Thomassé[1]，Gallai[2] の予想）
強連結グラフの頂点は α 個以下の閉路で覆うことができる．

さらにこの結果を受けて Sebő[5] は，整合円順列を求める多項式時間アルゴリズムと，重みつきの場合も含む Bessy–Thomassé の最大最小定理の最大値，最小値を達成する解を求めるアルゴリズムを提案した．

3 円順列と整合性

V の線形順序 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ という関係に，v_1 が v_n の次に続くという関係を加えたものを V 上の**円順列**と呼ぶ．時計回りにこの順序で並べた状態を考える．$u, v \in V$ に対し，区間 $[u, v]$ とは u から v へ時計回りで進んだときに通る頂点の集合（u, v も含む）を表すものする．区間 I の長さ，$\mathrm{length}(I)$ を，I に含まれる頂点の数より 1 少ないものと定義し，さらに，枝 $a = uv$ の長さは，$\mathrm{length}(a) := \mathrm{length}([u, v])$ とする．

円順列から n 通りの線形順序を得ることができる．線形順序は**前向き枝**($v_i v_j, i < j$) と**後ろ向き枝**($v_j v_i, i < j$) を持つ．ある円順列と有向グラフが与えられたとき，G の閉路 C のその円順列に対し，

$$\mathrm{ind}(C) := \frac{\sum_{a \in A(C)} \mathrm{length}(a)}{n}$$

を**回転数**と呼ぶ．回転数は明らかに整数であり，G 上で閉路をたどったときに円順列を何周するかに対応している．さらに，閉路の回転数は円順列から得られる線形順序の後ろ向き枝の数と一致する．

強連結有向グラフ $G = (V, A)$ の頂点集合 V 上に線形順序が与えられたとき，全ての枝が後ろ向き枝をちょうど一つ含む閉路にも含まれるとき，この線形順序が G に対し**整合的である**という．円順列が G に対し整合的であるとは，円順列から得られる線形順序が G に対して整合的であることをいう．また，そのような円順列を**整合円順列**という．これに対し，Bessy–Thomassé[1] は次の補題が成り立つことを示した．

補題 1 全ての強連結有向グラフは整合円順列を持つ．

4 整合円順列を求めるアルゴリズム

これまでの先行研究では Sebő による $O(n^2 m^2)$ のアルゴリズム FASO が知られていた．また，Knuth[4] の強連結グラフの分解からアルゴリズムを得ることができる．Knuth は全ての強連結グラフが $G_1, \ldots, G_k$ がそれぞれ強連結グラフになるように図 1 のように分解できることを示した．また，Knuth は次のように枝を 2 種類に分類できることを示した．

補題 2 有限の強連結グラフ $G = (V, A)$ が与えられて，$v \in V$ を任意に選んだとき，以下の 3 つの条件を満たすように G の全ての枝を 2 種類 ((f) と (b)) に分けることができる．

(i)　(b) を通らない閉路はない．

(ii)　任意の $a \in A$ は，(b) が 1 つだけで残りは (f) の閉路に含まれる．

(iii)　任意の $v_0 \in V \setminus \{v\}$ に対し，v_0 から v へ (f) の枝だけのパスがある．

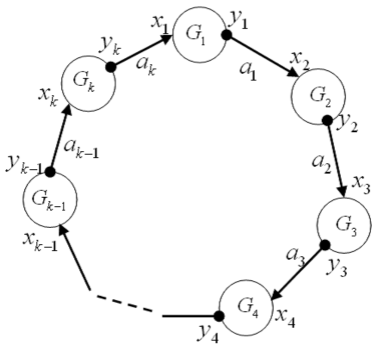

図 1. Knuth 分解

(i)，(ii) を満たすように枝が分類されているときに，(iii) を満たすように (f) と (b) を順次入れ替える操作を枝操作という．本研究では，補題 2 を満たすように枝が分類された状態において，(f) の枝のみに対してトポロジカルソートを行うことで整合円順列が得られることを示し，以下のアルゴリズム KDO を構成した．

1. Knuth_decomposition(G, 任意の頂点 v).
2. (f) の枝に対し，トポロジカルソートを行う．

Knuth_decomposition($G=(V,A)$, $y \in V$)
  if $|A|=0$ return;
  else
    Knuth 分解を行う．
    成分同士を結ぶ枝のうち 1 本を (b) とし，
    成分同士を結ぶほかの枝を (f) とする;
    for $i=1$ until $i=k$ *do*
      Knuth_decomposition(G_i, y_i);
    G に対し，y を中心に枝操作する;
  return;

さらに本研究では $O(nm)$ 時間で整合円順列を求めることができる耳分解を用いたアルゴリズム EDO を提案した．

1. $D=(V(D),A(D))$ とし, 1 点 $v \in V$ を選び, $V(D)=\{v\}$，$A(D)=\emptyset$ とする．
2. $(A \setminus A(D)) \cap \delta^+ v \neq \emptyset$ な $v \in V(D)$ を選ぶ．
   そのような v がなければ 4 へ．
3. D において，v を中心に枝操作する．
   while $(A \setminus A(D)) \cap \delta^+ v \neq \emptyset$ *do*
     $a \in (A \setminus A(D)) \cap \delta^+ v$ を選び，a を (b) とする．
     $\partial^- a$ から $D(V)$ へのパス P をみつける．
     全ての $a \in A(P)$ を (f) とする．
     $V(D) \leftarrow D(V) \cup V(P)$, $A(D) \leftarrow A(D) \cup A(P) \cup \{a\}$ とする．
   2. へ戻る．
4. (f) の枝に対しトポロジカルソートを行う

計算機実験において，アルゴリズム EDO は非常に高速に整合円順列を求められることが確認された．

5 最大最小定理

円順列と有向グラフ $G=(V,A)$ が与えられたとき，$S \subseteq V$ が安定集合で，それらが与えられた円順列と等価なある円順列で区間になるとき，S は**円安定集合**と呼ばれる．Sebő[5] は，Bessy–Thomassé[1] の結果にさらに重みをつけた次の最大最小定理を示した．

定理 2 整合円順列の与えられた強連結有向グラフ $G=(V,A)$ において，$w: V(G) \to \mathbf{N}$ とする．そのとき，$\max\{w(S): S$ は円安定集合 $\} = \min\{\mathrm{ind}(\mathcal{C}): \mathcal{C}$ は w 被覆 $\}$ が成り立つ．

この定理において任意の $v \in V$ に対して $w(v)=1$ の場合を考えると Gallai の予想は簡単に証明できる．

Sebő は，強連結グラフが与えられたときに定理 2 の等号を満たす解は次の 2 つのステップを行うことで求められることを示した．

Step 1 G に対して整合的な円順列を与える．

Step 2 G の補助グラフ $\hat{G}$ を作り，最小費用流問題を解く．

$w=1$ としてこのアルゴリズムを実行すると定理 1（Gallai の予想）を満たす閉路の集合と安定集合を得ることができる．Step 2 は，Goldberg–Tarjan[3] のアルゴリズムを用いて $O(nm\log(n^2/m)\log n)$ で解くことができる．Step 1 は，これまでの先行研究では $O(n^2m^2)$ であった．よって全体の計算量は $O(n^2m^2)$ であった．アルゴリズム EDO を用いれば, Step 1 が $O(nm)$ で求められるので，全体の計算量を $O(nm\log(n^2/m)\log n)$ に改善することができる．

参考文献

[1] S. Bessy and S. Thomassé: Three min-max theorems concerning cyclic orders of strong digraphs. *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, LNCS 3064, Springer-Verlag, 2004, pp. 132–138

[2] T. Gallai: Problem 15. *Theory of Graphs and its Applications*, M. Fiedler ed., Czech Acad. Sci. Prague, 1964, p. 161.

[3] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan: Finding minimum-cost circulations by successive approximation. *Math. Oper. Res.*, 15 (1990), pp. 430–466.

[4] D. E. Knuth: Wheels within wheels. *J. Combin. Theory*, Ser. B, 16 (1974), pp. 42–46.

[5] A. Sebő: Minmax relations for cyclically ordered digraphs. *Cahiers du Laboratoire Leibniz.*, Septembre 2004.