準ニュートン法を用いた 多変量 GARCH モデルのパラメータ推定

加藤 正樹
指導教員 室田 一雄 教授

2006 年 2 月 6 日

1 本研究の狙い

本研究では多変量 GARCH モデルの一種である対角 VEC モデルに対して, 障壁関数法と準ニュートン法を組み合わせたパラメータ推定手法を提案した. 本手法は対数障壁関数を用いることによりパラメータ行列の半正定値性を保証しつつ, 準ニュートン法を用いることによりメリット関数の最小化を行うものである. また本手法を用いることにより一般の資産数 N に対するパラメータ推定が可能となるため, 中規模 $(N=20,30)$ の問題において理解を深めることも試みた.

2 対角 VEC モデル

市場に N 個の投資可能な資産があるとし, 資産 $i(i=1,\ldots,N)$ の $t(\in\mathbb{Z})$ 期における収益率を $r_{i,t}$ とする. $r_{i,t}$ を縦に並べた $\{r_t\}$ を N 次元確率過程の実現値とみなしたときに, AR(m) モデルを用いた予測が行われることがある:

$$r_t = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j r_{t-j} + \varepsilon_t.$$

しかし実際には収益率に対する AR(m) モデルによる予測は十分な結果が得られないことが多い. そこで, 予測残差 $\{\varepsilon_t\}$ の条件付共分散行列 $H_t = \mathrm{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t^{\mathrm{T}} \mid \Psi_{t-1}]$ を考える. 時間変動する共分散のダイナミクスを表すモデルとして, Bollerslev *et al.* [3] は対角 VEC モデルを提案した.

定義 2.1. N 次元確率過程 $\{\varepsilon_t\}$ が対角 VEC 過程に従うとは, $\{\varepsilon_t\}$ の時間的発展が対称なパラメータ行列 $A=(\alpha_{ij}), B=(\beta_{ij}), C=(\gamma_{ij})$ を用いて次式で表されることをいう:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_t \mid \Psi_{t-1} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, H_t), \\ &H_t = C + A \odot (\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}^{\mathrm{T}}) + B \odot H_{t-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

$\odot$ は Hadamard 積であり, 行列の成分ごとの積を取った行列を表す. (半) 正定値行列同士の Hadamard 積はやはり (半) 正定値行列となる (Styan [6]) ため,

$$A \succeq O, B \succeq O, C \succeq O \tag{2}$$

を仮定すれば (1) により生成される $\{H_t\}$ は半正定値となる.

時系列データ $\{\hat{\varepsilon}_t \mid t=1,\ldots,T\}$ から対角 VEC モデルのパラメータ $\theta=(A,B,C)$ を推定するために最尤推定を用いる. $\{\varepsilon_t\}$ の条件付分布が正規分布 $\mathrm{N}(\mathbf{0}, H_t)$ となることから対数尤度関数は次のように表される:

$$\log L(\theta) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log\det H_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}} H_t^{-1}\hat{\varepsilon}_t \tag{3}$$

3 半正定値性を保つパラメータの推定法

本節では障壁関数法を用いて (2) を満たすパラメータ $\theta=(A,B,C)$ のうち, 対数尤度関数 (3) が極大となるようなものを求める手法を提案する. 対数障壁関数を用いた次のようなメリット関数を考

える:

$$f_m(A,B,C) := \sum_{t=1}^{T} \left(\log\det H_t + \hat{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}} H_t^{-1} \hat{\varepsilon}_t \right) \\ -\mu_m \left(\log\det A + \log\det B + \log\det C \right). \quad (4)$$

提案する手法は 0 に収束する正数列 $\{\mu_m\}$ とこのメリット関数 f_m に対して, f_m の無制約最適化と μ_m の更新を交互に行うことにより, 対数尤度関数 (3) の極大解を求める. メリット関数の最小化には BFGS 公式を用いた準ニュートン法により行う.

準ニュートン法を行うにはメリット関数の勾配が必要となる. 例えばメリット関数 (4) を $\alpha_{ij}(i<j)$ で偏微分すると次の表式が得られる:

$$\frac{\partial f_m}{\partial \alpha_{ij}} = \sum_{t=1}^{T} \left(2(H_t^{-1})_{ij} \frac{\partial h_{ij,t}}{\partial \alpha_{ij}} - \hat{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}} (H_t^{-1}) \frac{\partial H_t}{\partial \alpha_{ij}} (H_t^{-1}) \hat{\varepsilon}_t \right) \\ -2\mu_m (A^{-1})_{ij}$$

ここで $X_t = \left(\dfrac{\partial h_{ij,t}}{\partial \alpha_{ij}} \right)$ は (1) 式から

$$X_t = \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}} + B \odot X_{t-1}$$

と逐次的に計算できる.

4　数値実験

提案する手法を実装したプログラムを用いて数値実験を行った.

ほとんどの場合パラメータに関する半正定値制約 (2) が有効制約になるため, 障壁関数法の有効性が確かめられた.

パラメータを決定するのに必要な計算時間は資産数が増えるにしたがって指数関数的に増えてしまう.

また Bollerslev [2] による CCC モデル, Engle and Sheppard [5] による DCC モデルとの比較を行ったところ, 情報量基準として赤池情報量基準を採用した場合対角 VEC モデルの有効性が示された.

参考文献

[1] T. Bollerslev: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, **31** (1986), pp. 307–327.

[2] T. Bollerslev: Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate ARCH Model, *The Review of Economics and Statistics*, **72** (1990), pp.498–505.

[3] T. Bollerslev, R. F. Engle and J. Wooldridge: A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, *Journal of Political Economy*, **96** (1988), pp. 116–131.

[4] R. F. Engle: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica*, **50** (1982), pp. 987–1007.

[5] R. F. Engle and K. Sheppard: Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, *Working Paper 8554*, National Bureau of Economic Research.

[6] G. P. H. Styan: Hadamard Products and Multivariate Statistical Analysis, *Linear Algebra and Its Applications*, **6** (1973), pp. 217–240.