分数混合行列によるシステムの可制御性解析

46207　笠井 大幹
指導教員：室田 一雄 教授

1　論文要旨

システム解析においては，構造情報を把握したのちに数値情報を考慮することが望ましい．構造可制御性は，数値情報に依存しないシステム一般に関する基本的な性質である．構造的に不可制御であるシステムは真に不可制御であり，非零要素の数値をどのように設定しても可制御にすることはできない．一方，構造的に可制御であるシステムは，ほとんど全ての数値に関して可制御となるが，ある数値では特異的に不可制御となる．このようなパラメータの不可制御条件は，システムの可制御性について重要な情報を持つと思われる．本研究では，層混合行列の組合せ論的正準形を利用してシステムの不可制御条件を導出した．

また，ロバスト制御理論においては，線形分数変換表現と呼ばれる行列表現が標準的な記述方法として利用されている．本研究では線形分数変換の枠組を用いて分数混合行列という「拡張された新たな混合行列」を定義し，その記述力と性質に関して考察した．

2　混合行列

行列の非零要素を定数とパラメータに分けて扱う手段として，次の混合行列の概念がある [1, 2].

定義 1 (混合行列). $\boldsymbol{F}$ を体 $\boldsymbol{K}$ の拡大体とする．$\boldsymbol{F}$ 上の $m \times n$ 行列 A が,

$$A = Q_A + T_A,$$

(M1) Q_A は $\boldsymbol{K}$ 上の $m \times n$ 行列,
(M2) T_A の非零要素全体 $\mathcal{T}(\subseteq F)$ は $\boldsymbol{K}$ 上で代数的独立,

の形に書けるとき，A は $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ に関する混合行列であるという．

定義 2 (層混合行列). 混合行列 A の Q_A と T_A の非零行の集合が互いに素であるとき，A は $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ に関する層混合行列（LM 行列）であるという．

混合行列の階数は，多項式時間アルゴリズムによって計算できることが知られている．

LM 行列については，次に述べる LM 許容変換の下で組合せ論的正準形（CCF）と呼ばれる標準形が存在することが知られている．

定義 3 (LM 許容変換). $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ に関する LM 行列 $A = \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix}$ に対し，置換行列 $P_{\mathrm{r}}, P_{\mathrm{c}}$ と $\boldsymbol{K}$ 上の正則行列 S による $P_{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} S & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ T \end{pmatrix} P_{\mathrm{c}}$ の形の変換を LM 許容変換という．

定義 4 (組合せ論的正準形). LM 行列 A の行集合を R，列集合を C とする．以下の条件を満たす行列の中で，R と C の分割 $\{R_0; R_1, \cdots, R_b; R_\infty\}$，$\{C_0; C_1, \cdots, C_b; C_\infty\}$ が最も細かい行列 $\bar{A}$ を LM 許容変換によって求める．

(CCF1) $\bar{A}[R_k, C_l] = O \quad (0 \le l < k \le \infty)$,

(CCF2) $\begin{cases} |R_0| < |C_0| \ \text{または}\ |R_0| = |C_0| = 0, \\ |R_k| = |C_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, b), \\ |R_\infty| > |C_\infty| \ \text{または}\ |R_\infty| = |C_\infty| = 0, \end{cases}$

(CCF3) $\mathrm{rank}\bar{A}[R_k, C_k] = \min(|R_k|, |C_k|) \quad \forall k.$

この LM 行列 $\bar{A}$ のことを A の組合せ論的正準形 (CCF) という．CCF の行・列集合の分割の既約性と半順序に関する一意性は，劣モジュラ関数の最小化元の分配束構造から決定される．

3　不可制御条件の導出

対象とするシステムは次のディスクリプタ形式で記述されるものとする．

定義 5 (ディスクリプタ形式). 方程式 $F\dot{\boldsymbol{z}}(t) = A\boldsymbol{z}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ で記述されるシステムをディスクリプタシステムといい，(A, B, F) と記す．

定義 6 (可制御性). (A, B, F) に関して

$$\det[A - sF] \not\equiv 0,$$
$$\mathrm{rank}[A - zF \mid B] = n, \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

が成立するとき，(A, B, F) は可制御であるという．

実数行列 A, B, F を $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ に関する混合行列として扱う場合，可制御性は構造可制御性と呼ばれる．構造可制御性に関して以下の定理が成立し，その判定も多項式時間アルゴリズムで可能であることが知られている [2].

定理 1 (構造可制御性の必要十分条件). (A, B, F) が構造的に可制御であるための必要十分条件は，以下の条件 (SC1), (SC2), (SC3) が成立することである．

(SC1) $\mathrm{rank}\,[A - sF] = n$,

(SC2) $\mathrm{rank}\,[A \mid B] = n$,

(SC3) $\tilde{D}(s)$ の CCF $\bar{D}(s)$ において，対角ブロック $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \cdots, \bar{D}_b$ に不定元 s が含まれない．

システムが構造的に可制御であっても可制御であるとは限らない．そのような特異的に不可制御となる条件は次のような条件となる．

定理 2 (不可制御条件). (A, B, F) が構造的に可制御であるとき，不可制御となるための必要十分条件は条件 (UC1), (UC2) のいずれかが成立するパラメータの条件である．

(UC1) $\tilde{D}(s)$ の CCF $\bar{D}(s)$ の対角ブロック $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \cdots, \bar{D}_b$ について，$\det \bar{D}_1 = 0$，または $\det \bar{D}_2 = 0$，または $\cdots$，または $\det \bar{D}_b = 0$ となる．

(UC2) 水平尾 $\bar{D}_0$ の $|R_0|$ 次小行列式の一部が 1 次以上の共通因子を持ち，残りの $|R_0|$ 次小行列式は恒等的に 0 となる．

(UC1) に関しては，単純に行列式を各ブロックごとに数式処理を行なって求めればよい．(UC2) に関しては，$|R_0|$ 次小行列式に対してユークリッドの互除法を用いることで理論的には求めることができる．しかし係数体 $\boldsymbol{F}$ の構造が具体的でないため，その条件を導出することは非常に難しい．

4 分数混合行列

ロバスト制御理論における行列の記述手段として，次の線形分数変換が用いられる [3].

定義 7 (線形分数変換). $M = \begin{bmatrix} P & R \\ S & Q \end{bmatrix}, \Theta$ について，$I - P\Theta$ は正則とする．Θ に関する写像

$$\mathcal{F}(M, \Theta) = Q + S\Theta\,(I - P\Theta)^{-1} R$$

を Θ に関する線形分数変換（LFT）という．

次に定義する分数混合行列という行列は，パラメータ行列 Θ に関する LFT であり，混合行列の自然な拡張となっている．

定義 8 (分数混合行列). $\boldsymbol{F}$ を体 $\boldsymbol{K}$ の拡大体とする．$\boldsymbol{F}$ 上の $m \times n$ 行列 A が,

$$A = Q + S\Theta\,(I_p - P\Theta)^{-1} R,$$

(F1) P は p 次, Q は $m \times n$, R は $p \times n$, S は $m \times p$ の $\boldsymbol{K}$ 上の行列,

(F2) Θ は $\boldsymbol{F}$ 上の p 次正方行列で，その非零要素全体は $\boldsymbol{K}$ 上で代数的に独立,

の形に書けるとき，A を $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{F})$ に関する分数混合行列という．

LFT の定義より，分数混合行列の非零要素はパラメータ $\theta_1, \cdots, \theta_N, \left(N \leq p^2\right)$ の有理関数となり得るため，混合行列よりも広い範囲の行列を記述することができる．

分数混合行列の階数計算に関して以下が成り立つ．

定理 3 (分数混合行列の階数計算). 分数混合行列 $Q + S\Theta\,(I_p - P\Theta)^{-1} R$ の階数は,

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} Q & O & S \\ R & -I_p & P \\ O & \Theta & -I_p \end{bmatrix} - 2p$$

に等しい．

行列 $\begin{bmatrix} Q & O & S \\ R & -I_p & P \\ O & \Theta & -I_p \end{bmatrix}$ は通常の混合行列であるから，分数混合行列の階数は効率的に計算することができる．

以上から，独立パラメータ数が高々 p^2 個である $m \times n$ 型の混合行列全体を $M_{m \times n, p}$，分数混合行列全体を $M^{\natural}_{m \times n, p}$ とすると

$$M_{m \times n, p} \subseteq M^{\natural}_{m \times n, p} \simeq M_{(m+2p) \times (n+2p), p}$$

のような関係があると言える．ただし，$\simeq$ は分数混合行列の階数計算が次元を上げた混合行列の階数計算に帰着できるということを意味する．

非零要素が N 個のパラメータの有理式となる行列は LFT で記述でき，その LFT を求める方法も知られている．しかし，LFT は一意ではなく，得られた LFT の Θ のサイズも最小とは限らない．Θ のサイズが最小となる LFT を求めることは一般に難しいことが知られているため，非零要素がパラメータの有理式となる行列が分数混合行列に帰着できるかどうかを判定することは難しい．ただし，非零要素がパラメータのアフィン関数となる行列に関して次の結果が得られた．

定理 4. 独立な N 個のパラメータのアフィン関数 $A(\boldsymbol{\theta}) = A(\boldsymbol{0}) + \sum_{i=1}^{N} \theta_i A_i$ に関して，$r_i = \mathrm{rank}\,(A_i) = 1 \quad (\forall i)$ となることは，$A(\boldsymbol{\theta})$ が分数混合行列に帰着できるための十分条件である．

参考文献

[1] 室田一雄: マトロイドとシステム解析．「離散構造とアルゴリズム I」(藤重悟 編)，近代科学社，東京，1992，第 2 章，pp. 57–109.

[2] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis.* Springer, Berlin, 2000.

[3] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover: *Robust and Optimal Control.* Prentice-Hall, New Jersey, 1996.