

2026 年度 大学院入学試験問題  
2026 School Year Graduate School Entrance Examination  
Problem Booklet

システム情報学 / Information Physics and Computing

第1問から第3問のうち、2問のみを選択して解答せよ。

Answer two out of Problems 1-3.

試験時間 / Examination Time: 10:00~11:40

注意事項 / Instructions

- (1) 試験開始の合図まで、この問題冊子を開かないこと。  
Do not open this booklet until the starting signal is given.
- (2) 本冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあつた場合には申し出ること。草稿用紙を含む全ページを本冊子から切り離してはならない。  
You should notify the examiner if there are missing or incorrect pages in your booklet. Do not separate all pages including the draft papers from this booklet.
- (3) 問題は第1問から第3問まであり、日本語は2頁から14頁、英文は15頁から27頁である。3問のうち2問を日本語ないし英語で解答すること。  
Three problems appear on pages 2 - 14 in Japanese and pages 15 - 27 in English. Answer two out of the three problems in Japanese or English.
- (4) 解答用紙2枚が渡される。1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること。必要ときは解答用紙の裏面も使用してよい。  
Two answer sheets will be given. Use one sheet per problem. You may use the back of the sheet if necessary.
- (5) 各解答用紙の指定された箇所に、受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること。氏名は書いてはならない。  
Do not forget to fill the examinee's number and the problem number in the designated place at the top of each answer sheet. Do never put your name.
- (6) 試験問題の内容に関する質問に対しては、原則として答えない。  
No questions relating to the contents of the problems are acceptable in principle.
- (7) 解答に関係のない記号、符号などを記入した解答は無効とする。  
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.
- (8) 他に指示がない限り、問題解答用紙には最終解答のみでなく、計算や導出の過程を記述すること。論拠の不十分な解答は減点する。問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は、適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい。  
Your answers must include calculations and derivation processes, not just the final conclusion, unless otherwise indicated. Lack of justification will result in score deduction. In the case that a problem can be interpreted in several ways, you may answer the problem adding suitable definitions or conditions.
- (9) 解答用紙および問題冊子は試験室から持ち出さないこと。  
Do not take the answer sheets and this booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.
--------------------------------	-----

上欄に受験番号を記入すること。  
Fill this box with your examinee's number

選択した問題番号 / Problem numbers you selected		
---	--	--

上欄に選択した2つの問題番号を記入すること。  
Fill these boxes with the problem numbers you selected.

草稿用紙  
(切り離さないこと)

草稿用紙  
(切り離さないこと)

## 第1問

連続時間信号  $x(t)$  ( $t$  は時間を表す実数) に対し, そのフーリエ変換を

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$$

と定義する. ここで,  $\omega$  は角周波数を表す実数であり,  $j$  は虚数単位である. 円周率を  $\pi$  とし, 以下の問いに答えよ.

(1)  $T$  を正の実数とするとき, 矩形関数  $\text{rect}_T(t)$  を次式で定義する.

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{if } |t| > T/2 \end{cases}$$

(a)  $\text{rect}_2(t)$  の振幅スペクトルの概形を  $-9 \leq \omega \leq 9$  の範囲で図示せよ. 零点 (振幅スペクトルの値がゼロとなる角周波数) を横軸に明記すること. 縦軸に振幅スペクトルのピーク値は書かなくてもよい.

(b)  $\text{rect}_2(t-1)$  のフーリエ変換を求めよ.

(2) 2つの連続時間信号  $x(t)$  と  $y(t)$  に対し, 畳み込み積分  $x(t) * y(t)$  を次式で定義する.

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

(a)  $\text{rect}_1(t) * \text{rect}_1(t)$  のグラフを  $-3 \leq t \leq 3$  の範囲で図示せよ. グラフを特徴づける横軸・縦軸の値を明記すること.

(b)  $T$  を正の実数とするとき, 三角形関数  $\text{tri}_T(t)$  を次式で定義する.

$$\text{tri}_T(t) = \begin{cases} 1 - |2t/T| & \text{if } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{if } |t| > T/2 \end{cases}$$

$\text{tri}_2(t)$  の振幅スペクトルの概形を  $-9 \leq \omega \leq 9$  の範囲で図示せよ. 零点を横軸に明記すること. 縦軸に振幅スペクトルのピーク値は書かなくてもよい.

(次のページに続く)

長さ  $N$  の離散時間信号  $x[n]$  ( $n$  は時間を表す整数) に対し, その  $N$  点離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform; DFT) を次式で定義する.

$$X[k] = \text{DFT}[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

ここで,  $k$  は角周波数を表す整数である. 以下の問いに答えよ.

- (3)  $W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$  とし,  $u_k[n] = W_N^{kn}$  と定義する.  $l, m$  を整数とすると, 次式が成り立つことを示せ. ここで, 上付きの  $*$  は複素共役を表す.

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_l[n] u_m^*[n] = \begin{cases} N & \text{if } l = m \pmod{N} \\ 0 & \text{if } l \neq m \pmod{N} \end{cases}$$

- (4) 偶数  $M$  に対し, 矩形窓関数  $\text{rect}_M[n]$  と三角窓関数  $\text{tri}_M[n]$  をそれぞれ次式で定義する.

$$\text{rect}_M[n] = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \text{tri}_M[n] = \begin{cases} 1 - \left|\frac{2n}{M} - 1\right| & \text{if } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$M$  より長い信号  $x[n]$  に対し,  $\text{rect}_M[n]$  と  $\text{tri}_M[n]$  を乗算した結果として得られる信号を, それぞれ  $\tilde{x}_{\text{rect}}[n] = \text{rect}_M[n]x[n]$  と  $\tilde{x}_{\text{tri}}[n] = \text{tri}_M[n]x[n]$  とする.

- (a)  $\tilde{x}_{\text{rect}}[n]$  の  $M$  点 DFT と  $\tilde{x}_{\text{tri}}[n]$  の  $M$  点 DFT の違いを説明せよ. 説明では「スペクトル漏れ」, 「メインローブ」, 「サイドローブ」という用語を用いること. DFT スペクトルを示す必要はない.
- (b) 周波数  $f_0$  の余弦波  $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  を, サンプルング周波数  $f_s$  で標本化し, 離散時間信号  $g[n] = g(n/f_s)$  を得る. ここで,  $f_s > 2f_0$  とする. 信号  $\tilde{g}_{\text{rect}}[n] = \text{rect}_M[n]g[n]$  の  $M$  点 DFT において, スペクトル漏れが生じないための条件を述べよ. 条件を導出する過程も示すこと.

草稿用紙  
(切り離さないこと)

草稿用紙  
(切り離さないこと)

## 第 2 問

演算増幅器，スイッチ，および抵抗  $R_1$  からなる図 1 の回路を考える．演算増幅器は理想的であり，ゲインと入力インピーダンスは無限大，出力インピーダンスはゼロ，入出力間に遅延はないとする．スイッチは A 側か B 側かいずれかに常に接続されており，切替に伴う遅延は無視する．時間領域における回路への入力電圧を  $v_1(t)$ ，回路からの出力電圧を  $v_2(t)$  とし，それらのラプラス変換を  $V_1(s)$  および  $V_2(s)$  とする．なお，以下の設問でグラフを図示する場合は，概形を特徴づける縦軸・横軸の量を明記すること．

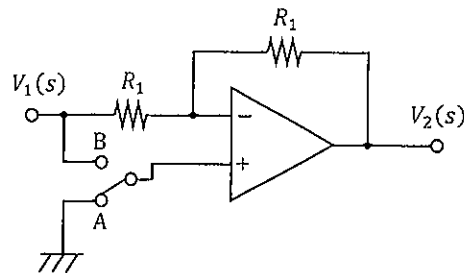


図 1

(1) 図 1 の回路について次の問いに答えよ．

- スイッチが A 側のとき， $V_1(s)$  を用いて  $V_2(s)$  を表せ．
- スイッチが B 側のとき， $V_1(s)$  を用いて  $V_2(s)$  を表せ．
- スイッチが A 側か B 側か場合分けし，回路の入力インピーダンスを答えよ．

(2) 図 2 のような周期  $T$  の矩形周期信号  $f(t)$  を考え，図 1 の回路において  $f(t)$  が +1 なら B 側，-1 なら A 側にスイッチを切り替える．次の (a) および (b) の条件で入力  $v_1(t)$  を与えるとき，出力  $v_2(t)$  の概形を  $0 \leq t \leq 2T$  の範囲で図示せよ．なお， $t < 0$  においては  $f(t) = 0$  とし，スイッチは B 側にあるとする．

- 図 3 のように， $f(t)$  の周期を 2 倍にした  $g(t)$  を  $v_1(t)$  とする場合．
- 図 4 のように， $f(t)$  を時間  $\tau$  ( $0 \leq \tau < \frac{T}{2}$ ) シフトした  $h(t)$  を  $v_1(t)$  とする場合．

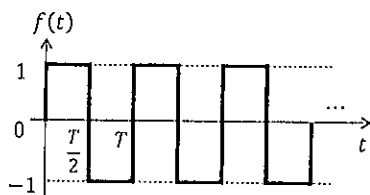


図 2

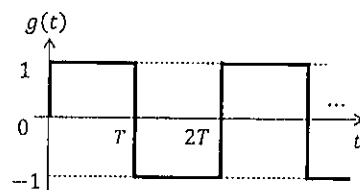


図 3

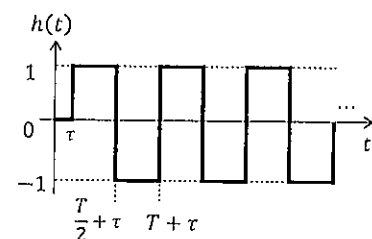


図 4

(次のページに続く)

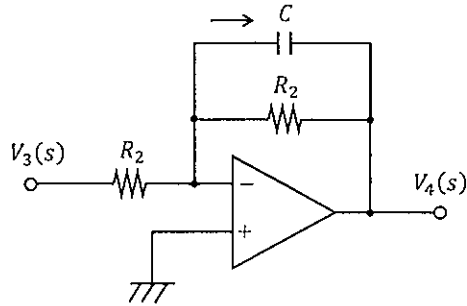


図 5

演算増幅器，抵抗  $R_2$ ，およびキャパシタ  $C$  からなる図 5 の回路を考える．演算増幅器は理想的であり，時間領域における回路の入出力電圧を  $v_3(t)$  および  $v_4(t)$ ，それらのラプラス変換を  $V_3(s)$  および  $V_4(s)$  とする．キャパシタ  $C$  は  $t=0$  において電荷を持たず，キャパシタ  $C$  に流れる電流は図 5 中の矢印の向きを正とする．

(3) 図 5 の回路について次の問いに答えよ．

(a)  $V_3(s)$  を用いて  $V_4(s)$  を表せ．

(b) ステップ関数  $u(t)$  を次のように定義する．

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

$v_3(t) = u(t)$  とするとき， $v_4(t)$  を  $t$  の関数として求めよ．また，その概形を  $0 \leq t \leq 2R_2C$  の範囲で図示せよ．

(c) ランプ関数  $r(t)$  を次のように定義する．

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}$$

$v_3(t) = r(t)$  とするとき，キャパシタ  $C$  に流れる電流  $i(t)$  を  $t$  の関数として求めよ．また，その概形を  $0 \leq t \leq 2R_2C$  の範囲で図示せよ．

(4) 図 1 の回路の出力に図 5 の回路の入力を接続し，問い (2)-(b) の条件で駆動する． $R_2C \gg T$  とするときの出力  $v_4(t)$  について，次の問いに答えよ．

(a)  $v_4(\tau)$ ,  $v_4(\frac{T}{2})$ ,  $v_4(\tau + \frac{T}{2})$ ,  $v_4(T)$  の値を求めよ．

(b) 十分に長い時間  $t \gg T$  が経過すると， $v_4(t)$  は平均値  $v_0$  に近づきつつ， $v_0 - \Delta v$  から  $v_0 + \Delta v$  の範囲で周期変動する．微小量  $x = \frac{T}{R_2C} \ll 1$  に対する指数関数の近似  $e^{-x} \simeq 1 - x$  を用いて， $v_0$  および  $\Delta v$  を  $T, \tau, R_2, C$  によって表せ．

草稿用紙  
(切り離さないこと)

草稿用紙  
(切り離さないこと)

## 第 3 問

図 1 と図 2 のフィードバック制御系を考える. ここで  $P(s)$  と  $K(s)$  は制御対象と補償器の伝達関数であり, 図 1 と図 2 の系で共通である. とくに  $P(s) = P_1(s)$  とし,  $P_1(s)$  と  $K(s)$  は次式で与えられるとする.

$$P_1(s) = \frac{20(1-s)}{(s+1)(s+20)}, \quad K(s) = \alpha + \frac{\beta}{s}$$

ただし,  $\alpha, \beta$  は定数パラメータとする. また,  $r$  は目標値,  $u$  は制御入力,  $y$  は出力である. 図 2 におけるフィードフォワード補償器  $F(s)$  と  $H(s)$  の伝達関数は以下で与えられる.

$$F(s) = \frac{1-s}{s+10}, \quad H(s) = \frac{s+1}{s+10}$$

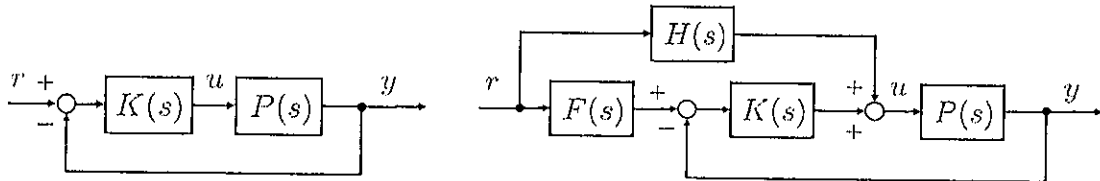


図 1

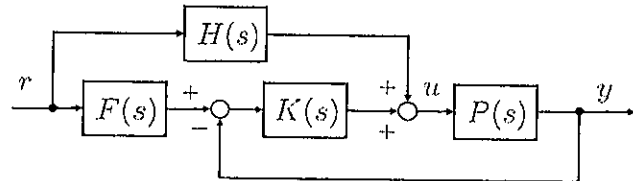


図 2

以下の問いに答えよ.

- (1) (a) 図 1 の  $r$  から  $y$  への伝達関数  $T_1(s)$  および図 2 の  $r$  から  $y$  への伝達関数  $T_2(s)$  を求めよ.
  - (b) 図 1 と図 2 の閉ループ系が安定となるような  $\alpha, \beta$  の条件をそれぞれ求めよ.
  - (c) 図 1 および図 2 の系について, 問い (1)-(b) の条件が満たされるとき, 目標値  $r$  として単位ステップ信号を用いた場合の出力  $y$  の定常値をそれぞれ求めよ.
- (2) (a) 図 2 において  $\alpha = \beta = 0$  としたとき, 目標値  $r$  として単位ステップ信号を用いた場合の出力  $y$  の時間応答を求めよ.
  - (b) 制御対象  $P(s)$  は制御が難しいとされる性質を有している. その性質が問い (2)-(a) で求めたステップ応答にどのような影響を及ぼしているか説明せよ.

(次のページに続く)

- (3) (a) 制御対象  $P(s)$  に関して、以下では  $P_1(s)$  は不確かさを含む実際のシステムとして考え、制御系の設計時には簡易なモデルとして

$$P_0(s) = \frac{1-s}{s+1}$$

を用いることとする。図2の系における  $H(s)$  は、制御対象  $P(s)$  のモデルとして  $P_0(s)$  を想定し、 $H(s) = F(s)/P_0(s)$  と設定したものである。制御系として図2のような構成を用いる目的が何であるか、制御対象がモデルと一致した場合、つまり  $P(s) = P_0(s)$  と設定した場合の制御系の伝達関数を求めた上で説明せよ。図1の系の構成や閉ループ系としての性質との違いについても説明すること。

- (b) 問い(2)-(b)で述べたステップ応答が有する性質は、フィードバック制御によって除去が可能であるか、また問い(3)-(a)で述べた図2の系の設計にどのような制約をもたらすか説明せよ。

以下の開ループ伝達関数を持つフィードバック制御系について考える。

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

ただし、ゲイン  $K$  は正の定数とする。以下の問いに答えよ。

- (4) (a) ナイキスト軌跡を描いて、閉ループ系が安定となるゲイン  $K$  の範囲を求めよ。ナイキスト軌跡を描く際には、軌跡が実軸および虚軸と交わる点の座標およびその時の角周波数を明記すること。また軌跡が漸近する直線がある場合には、それを明記すること。
- (b) 閉ループ系の位相余裕が45度以上となるような  $K$  の範囲を求めよ。
- (c) このフィードバック制御系におけるバンド幅はゲイン交差周波数  $\omega_{gc}$  とほぼ一致する。 $\omega_{gc}$  が満たす式を  $K$  を用いて求めた上で、ゲイン  $K$  を大きくすることがバンド幅をどのように変化させ、それが閉ループ系の性能にどのように影響するか説明せよ。

草稿用紙  
(切り離さないこと)

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

### Problem 1

Given a continuous-time signal  $x(t)$  ( $t$  is a real number representing time), its Fourier Transform (FT) is defined as

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

where  $\omega$  is a real number representing the angular frequency and  $j$  is the imaginary unit. Let  $\pi$  denote the circular ratio, and answer the following questions.

(1) Given a positive real number  $T$ , the rectangular function  $\text{rect}_T(t)$  is given as

$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{if } |t| > T/2. \end{cases}$$

(a) Draw the outline of the amplitude spectrum of  $\text{rect}_2(t)$  over the range  $-9 \leq \omega \leq 9$ . Clearly mark the zero points (the angular frequencies at which the amplitude spectrum is zero) on the horizontal axis. You need not label the peak value of the amplitude spectrum on the vertical axis.

(b) Find the FT of  $\text{rect}_2(t - 1)$ .

(2) Given two continuous-time signals  $x(t)$  and  $y(t)$ , the convolution integral  $x(t) * y(t)$  is defined as

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

(a) Draw the graph of  $\text{rect}_1(t) * \text{rect}_1(t)$  over the range  $-3 \leq t \leq 3$ . Indicate the values that characterize the graph on the horizontal and vertical axes.

(b) Given a positive real number  $T$ , the triangular function  $\text{tri}_T(t)$  is given as

$$\text{tri}_T(t) = \begin{cases} 1 - |2t/T| & \text{if } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{if } |t| > T/2. \end{cases}$$

Draw the outline of the amplitude spectrum of  $\text{tri}_2(t)$  over the range  $-9 \leq \omega \leq 9$ . Clearly mark the zero points on the horizontal axis. You need not label the peak value of the amplitude spectrum on the vertical axis.

(Continued on the next page)

Given an  $N$ -length discrete-time signal  $x[n]$  ( $n$  is an integer representing time), its  $N$ -point Discrete FT (DFT) is defined as

$$X[k] = \text{DFT}[x[n]] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right),$$

where  $k$  is an integer representing the angular frequency. Answer the following questions.

- (3) Let  $W_N = \exp(-j\frac{2\pi}{N})$ , and define  $u_k[n] = W_N^{k \cdot n}$ . Given integers  $l$  and  $m$ , prove that the following equation holds. Here, the superscript  $*$  denotes the complex conjugate.

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_l[n] u_m^*[n] = \begin{cases} N & \text{if } l = m \text{ mod } N, \\ 0 & \text{if } l \neq m \text{ mod } N. \end{cases}$$

- (4) Given an even number  $M$ , the rectangular window function  $\text{rect}_M[n]$  and the triangular window function  $\text{tri}_M[n]$  are respectively defined as

$$\text{rect}_M[n] = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq n \leq M-1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{tri}_M[n] = \begin{cases} 1 - \left|\frac{2n}{M} - 1\right| & \text{if } 0 \leq n \leq M-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For a signal  $x[n]$  whose length is longer than  $M$ , the signals obtained by multiplying it with  $\text{rect}_M[n]$  and  $\text{tri}_M[n]$  are defined as  $\tilde{x}_{\text{rect}}[n] = \text{rect}_M[n]x[n]$  and  $\tilde{x}_{\text{tri}}[n] = \text{tri}_M[n]x[n]$ , respectively.

- (a) Explain the difference between the  $M$ -point DFT of  $\tilde{x}_{\text{rect}}[n]$  and that of  $\tilde{x}_{\text{tri}}[n]$ . In your explanation, be sure to use the terms “spectral leakage,” “main lobe,” and “side lobe.” You need not show the DFT spectra.
- (b) A cosine wave with the frequency  $f_0$ , defined as  $g(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ , is sampled at a sampling frequency  $f_s$ , yielding the discrete-time signal  $g[n] = g(n/f_s)$ , where  $f_s > 2f_0$ . For the  $M$ -point DFT of the signal  $\tilde{g}_{\text{rect}}[n] = \text{rect}_M[n]g[n]$ , describe the condition under which spectral leakage does not occur. Also, show the derivation process leading to the condition.

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

## Problem 2

Consider the circuit in Fig. 1 consisting of an operational amplifier, a switch, and resistors with resistance  $R_1$ . The amplifier has ideal characteristics with an infinitely large gain and input impedance, zero output impedance, and no delay between the input and output. The switch is always connected to either side A or side B, and the delay in switching is negligible. Denote the input and output voltages, respectively, by  $v_1(t)$  and  $v_2(t)$  in the time-domain and their Laplace transforms by  $V_1(s)$  and  $V_2(s)$ . When you draw graphs in the following questions, indicate the quantities clearly that characterize the outline on the horizontal and vertical axes.

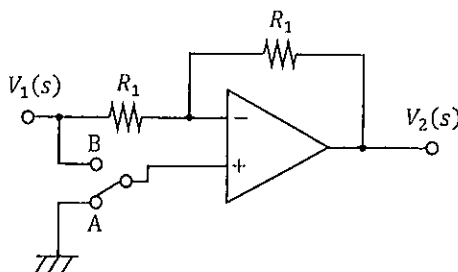


Fig. 1

- (1) Answer the following questions regarding the circuit in Fig. 1.
  - (a) Express  $V_2(s)$  using  $V_1(s)$  when the switch is on side A.
  - (b) Express  $V_2(s)$  using  $V_1(s)$  when the switch is on side B.
  - (c) Answer the input impedance of the circuit, distinguishing between cases in which the switch is on side A or side B.
  
- (2) We consider a periodic rectangular signal  $f(t)$  with a period  $T$  in Fig. 2, with which we switch the connection in Fig. 1 to side B when  $f(t)$  is  $+1$  and side A when  $f(t)$  is  $-1$ . Draw the outline of  $v_2(t)$  over  $0 \leq t \leq 2T$  when the input  $v_1(t)$  is given with the following conditions in (a) and (b). We assume that  $f(t) = 0$  and the switch is on side B for  $t < 0$ .
  - (a)  $v_1(t)$  is given as  $g(t)$  in Fig. 3, which has twice the period of  $f(t)$ .
  - (b)  $v_1(t)$  is given as  $h(t)$  in Fig. 4, which is shifted in time from  $f(t)$  by  $\tau$  ( $0 \leq \tau < \frac{T}{2}$ ).

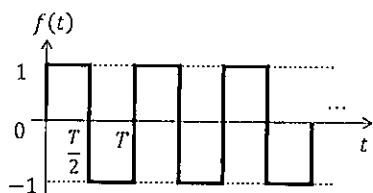


Fig. 2

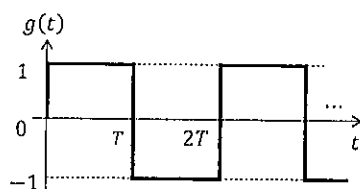


Fig. 3

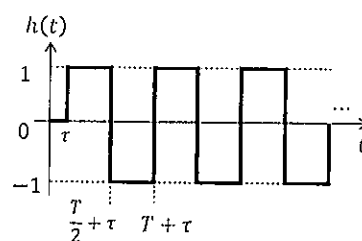


Fig. 4

(Continued on the next page)

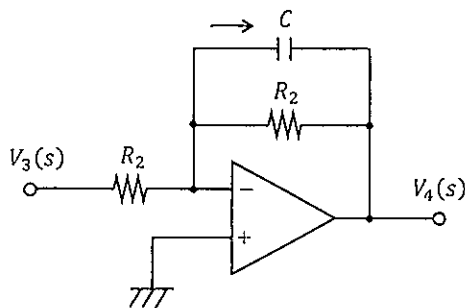


Fig. 5

Consider the circuit in Fig. 5 consisting of an operational amplifier, resistors with resistance  $R_2$ , and a capacitor with capacitance  $C$ . The amplifier has ideal characteristics. Denote the input and output voltages, respectively, by  $v_3(t)$  and  $v_4(t)$  in the time-domain and their Laplace transforms by  $V_3(s)$  and  $V_4(s)$ . The capacitor is uncharged at  $t = 0$ , and the arrow in Fig. 5 indicates the positive direction of current through the capacitor.

(3) Answer the following questions regarding the circuit in Fig. 5.

- (a) Express  $V_4(s)$  using  $V_3(s)$ .
- (b) Define the step function  $u(t)$  as

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}.$$

Express  $v_4(t)$  as a function of  $t$  when  $v_3(t) = u(t)$ . Moreover, draw its outline over  $0 \leq t \leq 2R_2C$ .

- (c) Define the ramp function  $r(t)$  as

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}.$$

Express the current flowing into the capacitor,  $i(t)$ , as a function of  $t$  when  $v_3(t) = r(t)$ . Moreover, draw its outline over  $0 \leq t \leq 2R_2C$ .

(4) We connect the output of the circuit in Fig. 1 to the input of the circuit in Fig. 5 and drive it under the condition in Question (2)-(b). Answer the following questions regarding the output  $v_4(t)$  when  $R_2C \gg T$ .

- (a) Obtain the values of  $v_4(\tau)$ ,  $v_4(\frac{T}{2})$ ,  $v_4(\tau + \frac{T}{2})$ , and  $v_4(T)$ .
- (b) After a sufficiently long time  $t \gg T$ ,  $v_4(t)$  approaches the average  $v_0$  while showing a periodic change within the range from  $v_0 - \Delta v$  to  $v_0 + \Delta v$ . Express  $v_0$  and  $\Delta v$  using  $T, \tau, R_2$ , and  $C$  based on the approximation of the exponential function  $e^{-x} \simeq 1 - x$  for a sufficiently small quantity  $x = \frac{T}{R_2C} \ll 1$ .

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

### Problem 3

Consider the feedback control systems depicted in Figs. 1 and 2. Here,  $P(s)$  and  $K(s)$  are the transfer functions of the plant and the controller, respectively, and are the same for the systems in Figs. 1 and 2. Specifically, we set  $P(s) = P_1(s)$ , and let  $P_1(s)$  and  $K(s)$  be as follows:

$$P_1(s) = \frac{20(1-s)}{(s+1)(s+20)}, \quad K(s) = \alpha + \frac{\beta}{s}$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are constant parameters. Moreover,  $r$  is the reference,  $u$  is the control input, and  $y$  is the output. In Fig. 2, the transfer functions of the feedforward controllers  $F(s)$  and  $H(s)$  are given as follows:

$$F(s) = \frac{1-s}{s+10}, \quad H(s) = \frac{s+1}{s+10}.$$

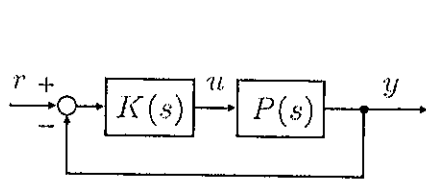


Fig. 1

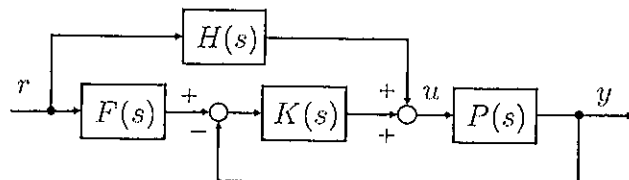


Fig. 2

Answer the following questions.

- (1) (a) Find the transfer function  $T_1(s)$  from  $r$  to  $y$  in Fig. 1 and the transfer function  $T_2(s)$  from  $r$  to  $y$  in Fig. 2.
  - (b) Find the conditions on  $\alpha$  and  $\beta$  for each of the closed-loop systems in Figs. 1 and 2 to be stable.
  - (c) For each of the systems in Figs. 1 and 2, when the conditions in Question (1)-(b) are satisfied, find the steady state value of the output  $y$  for the case where the reference  $r$  is a unit step signal.
- (2) (a) In Fig. 2, when we set  $\alpha = \beta = 0$ , find the time response of the output  $y$  for the case where the reference  $r$  is taken as a unit step signal.
  - (b) The plant  $P(s)$  possesses a property which is known to make its control difficult. Explain how this property affects the step response obtained in Question (2)-(a).

(Continued on the next page)

- (3) (a) Regarding the plant  $P(s)$ , in what follows, we consider  $P_1(s)$  to be the actual system containing uncertainties while during the control system design, we use as its simplified model

$$P_0(s) = \frac{1-s}{s+1}.$$

For  $H(s)$  in the system of Fig. 2, we have assumed  $P_0(s)$  to be the model of  $P(s)$  and have set  $H(s) = F(s)/P_0(s)$ . Explain what the objective is to use the structure of Fig. 2 as a control system after finding the transfer function of the control system when the plant coincides with the model, that is, when we set  $P(s) = P_0(s)$ . Moreover, explain the differences from the system structure in Fig. 1 and the differences in the properties of the closed-loop systems.

- (b) Explain whether the properties that the step response has as described in Question (2)-(b) can be removed by feedback control and also what constraints such properties impose on the design of the system in Fig. 2 described in Question (3)-(a).

Consider the feedback control system that has the open-loop transfer function given as follows:

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

where the gain  $K$  is a positive constant. Answer the following questions.

- (4) (a) Draw the Nyquist plot and find the region for the gain  $K$  such that the closed-loop system is stable. When drawing the Nyquist plot, indicate the coordinates of the intersections with the real and imaginary axes and the angular frequencies at those points. Moreover, if the Nyquist plot asymptotically approaches any lines, indicate them.
- (b) Find the region of  $K$  such that the phase margin of the feedback system is more than or equal to 45 degrees.
- (c) The bandwidth of this feedback system is about the same as the gain crossing frequency  $\omega_{gc}$ . Find an equation that  $\omega_{gc}$  satisfies using  $K$ , and then explain how the bandwidth changes as the gain  $K$  is taken larger, and how this affects the performance of the feedback system.

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper  
(Do not separate this from the booklet)

