2024 年度 大学院入学試験問題

2024 School Year Graduate School Entrance Examination
Problem Booklet

システム情報学 / Information Physics and Computing

第1問から第3問のうち，2問のみを選択して解答せよ．
Answer two out of Problems 1-3.

試験時間 / Examination Time:　　10:00〜11:40

注 意 事 項 / Instructions

(1) 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
Do not open this booklet until the starting signal is given.

(2) 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．草稿用紙を含む全ページを本冊子から切り離してはならない．
You should notify the examiner if there are missing or incorrect pages in your booklet. Do not separate all pages including the draft papers from this booklet.

(3) 問題は第1問から第3問まであり，日本文は2頁から14頁，英文は15頁から27頁である．3問のうち2問を日本語ないし英語で解答すること．
Three problems appear on pages 2 - 14 in Japanese and pages 15 - 27 in English. Answer two out of the three problems in Japanese or English.

(4) 解答用紙2枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面も使用してよい．
Two answer sheets will be given. Use one sheet per problem. You may use the back of the sheet if necessary.

(5) 各解答用紙の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．氏名は書いてはならない．
Do not forget to fill the examinee's number and the problem number in the designated place at the top of each answer sheet. Do never put your name.

(6) 試験問題の内容に関する質問に対しては，原則として答えない．
No questions relating to the contents of the problems are acceptable in principle.

(7) 解答に関係のない記号，符号などを記入した解答は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(8) 他に指示がない限り，問題解答用紙には最終解答のみでなく，計算や導出の過程を記述すること．論拠の不十分な解答は減点する．問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は，適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい．
Your answers must include calculations and derivation processes, not just the final conclusion, unless otherwise indicated. Lack of justification will result in score deduction. In the case that a problem can be interpreted in several ways, you may answer the problem adding suitable definitions or conditions.

(9) 解答用紙および問題冊子は試験室から持ち出さないこと．
Do not take the answer sheets and this booklet out of the examination room.

受験番号 / Examinee's number	No.

上欄に受験番号を記入すること．

Fill this box with your examinee's number

選択した問題番号 / Problem numbers you selected		

上欄に選択した2つの問題番号を記入すること．

Fill these boxes with the problem numbers you selected.

草稿用紙
(切り離さないこと)

草稿用紙
（切り離さないこと）

第1問

連続時間信号 $x(t)$（t は時間を表す実数）をフーリエ変換し，式 (I) のように周波数スペクトル $X(\omega)$（ω は角周波数を表す実数）が得られるとする．式 (II) は $X(\omega)$ の逆フーリエ変換である．j は虚数単位，π は円周率である．以下の問いに答えよ．

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \tag{I}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ \exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{II}$$

(1) 時間シフトしたディラックのデルタ関数 $x(t) = \delta(t-\tau)$ のフーリエ変換を求めよ．また，周波数シフトしたデルタ関数 $X(\omega) = \delta(\omega - \omega')$ の逆フーリエ変換を求めよ．

(2) 時間間隔 T の周期的なデルタ列 $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$ のフーリエ変換を求めよ．また，この $x(t)$ は周期関数でありフーリエ級数で展開できることを利用し，$x(t)$ のフーリエ変換もデルタ列となることを示せ．フーリエ級数展開は以下で与えられる．

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi m t}{T}\right) \tag{III}$$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi m t}{T}\right)\mathrm{d}t \tag{IV}$$

(3) 連続時間信号 $x(t)$ と $h(t)$ のフーリエ変換を $X(\omega)$ と $H(\omega)$ とする．このとき，$x(t)$ と $h(t)$ のたたみこみ積分

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{V}$$

のフーリエ変換は

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{VI}$$

で表せることを示せ．

（次のページに続く）

(4) 連続時間信号 $x(t)$ を一定時間間隔で離散化し，離散時間信号 $x[n]$（n は整数）を得るとき，$x[n]$ の z 変換は

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \qquad \text{(VII)}$$

で定義される．

(a) $x[n]$ が単位ステップ関数として，$x[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 1 & (n \geq 0) \end{cases}$ のように与えられるとき，式 (VII) の z 変換の収束領域を求めよ．また，収束する場合の $X(z)$ を有理関数で表せ．

(b) $x[n] = \exp(a\,|n|)$（a は実数）であるとき，式 (VII) の z 変換の収束領域を求めよ．また，収束する場合の $X(z)$ を有理関数で表せ．

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
（切り離さないこと）

第2問

理想特性を持つオペアンプ A_1 と，飽和出力電圧 $\pm V_s$ を持つオペアンプ A_2 を用いた図 1，3，4 に示す電気回路について，以下の問いに答えよ．なお図の中で $V_{\rm in1}$, $V_{\rm out1}$, $V_{\rm in2}$, $V_{\rm out2}$, ..., R, C はそれぞれ，入力端および出力端の電圧，抵抗の抵抗値，コンデンサの容量を表す．また初期時刻 $t=0$ においてコンデンサの電荷は 0 とする．

(1) 図 1 の回路を考える．$V_{\rm in1}(t)$ を用いて $V_{\rm out1}(t), 0 \leq t$ を表す式を示せ．

(2) 図 1 の回路において図 2 で表される周期 $2T$ の矩形波 $V_{\rm c}(t)$ を用いて $V_{\rm in1}(t) = V_{\rm c}(t)$ とする．$V_{\rm out1}(t), 0 \leq t$ を表す式を示せ．また $0 \leq t \leq 4T$ における $V_{\rm out1}(t)$ の概形を図示せよ．

(3) 図 3 の回路を考える．ただし $C = \frac{T}{2R}$, $V_{\rm in2}(t) = V_{\rm c}(t)$, $V_{\rm c}(t)$: 図 2 の矩形波，$V_{\rm ref}$: 定数，$-V_s \leq V_{\rm ref} \leq V_s$ とする．

(a) $V_{\rm out2}(t), 0 \leq t$ を表す式を示せ．

(b)

$$D := \frac{1}{2T}\int_0^{2T} V_{\rm out2}(t){\rm d}t$$

を $V_{\rm ref}$ の関数として表せ．

(4) 図 4 の回路を考える．ただし $C = \frac{T}{2R}$, $V_{\rm in3}(t) = V_{\rm c}(t)$, $V_{\rm c}(t)$: 図 2 の矩形波，とする．

(a) この回路の用途と特徴を説明せよ．

(b) $V_{\rm in4}(t) = V_s \sin(\omega t)$, $\omega := \frac{\pi}{10T}$ とした上で，$V_{\rm out3}(t), 0 \leq t \leq 20T$ の概形を図示せよ．

(次のページに続く)

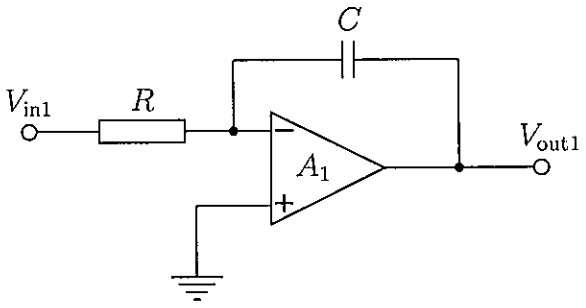
C
V_in1
R
A_1
V_out1

図 1

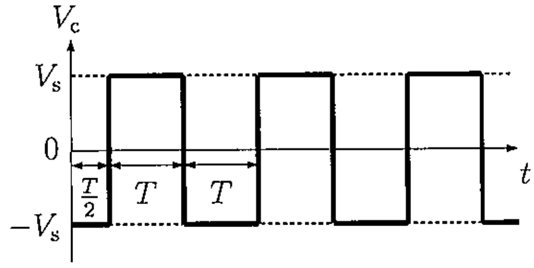
V_c
V_s
0
T/2
T
T
t
−V_s

図 2

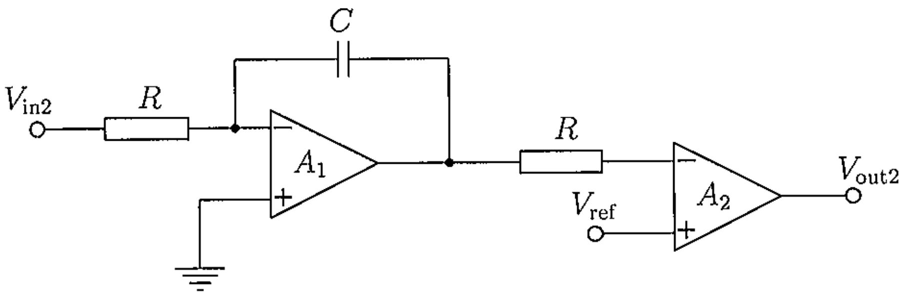
C
V_in2
R
A_1
R
V_ref
A_2
V_out2

図 3

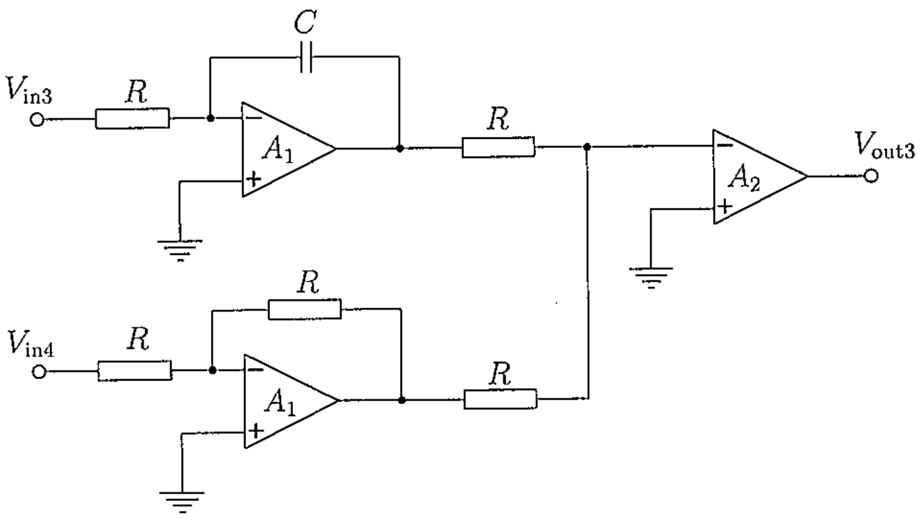
C
V_in3
R
A_1
R
A_2
V_out3
R
V_in4
R
A_1
R

図 4

草稿用紙
（切り離さないこと）

草稿用紙
（切り離さないこと）

第3問

(1) 図1において伝達関数 $P(s) = P_1(s)$ とする．$P_1(s)$ は1次系とし，その単位ステップ応答の立ち上り時間は0.44，定常値は2となっている．$P_1(s)$ を示せ．ここで，ステップ応答が定常値の10%から90%になるまでに要する時間を立ち上り時間という．必要なら $\ln 2 = 0.7$，$\ln 3 = 1.1$，$\ln 5 = 1.6$ を用いよ．

(2) 図1において伝達関数 $P(s) = P_2(s)$ とする．$P_2(s)$ は最小位相系とし，そのボード線図のゲイン曲線は図2のようになっている．$P_2(s)$ を示せ．

(3) 図3において

$$P(s) = \frac{1-s}{s-p},\ p > 1,\quad K(s) = K,\ 1 < K < p$$

とする．感度関数 $S(s) = 1/(1 + P(s)K(s))$ に対して，そのピークゲインを $M_{rS} = \max_{\omega \in R} |S(\mathrm{j}\omega)|$ と定義する．$p \leq 3$ のとき $M_{rS} \geq 2$ となることを示せ．ただし，安定な $G(s)$ に対し，以下の関係式（最大値の原理）を用いてもよい．

$$\max_{\omega \in R} |G(\mathrm{j}\omega)| = \max_{\mathrm{Re}(s) \geq 0} |G(s)|$$

(4) 図3において開ループ伝達関数を $L(s) = P(s)K(s)$，相補感度関数を $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ とする．図4に $L(s)$ のベクトル軌跡と位相余裕を示す．PMは位相余裕を表し，ゲイン交差周波数を ω_{gc}，相補感度関数のピークゲインを M_r とする．以下の問いに答えよ．

(a) PMを用いて $|T(\mathrm{j}\omega_{gc})|$ を表せ．

(b) $\mathrm{PM} \geq 45^\circ$ とする M_r を求めよ．

（次のページに続く）

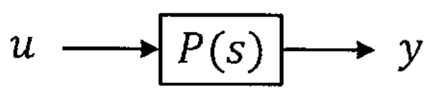
u
P(s)
y

図1

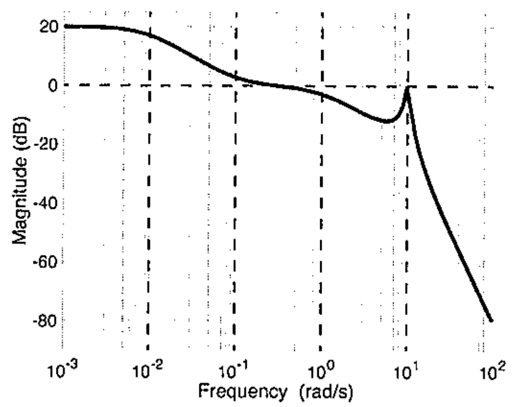
20
0
-20
-40
-60
-80
Magnitude (dB)
10^-3
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/s)

図2

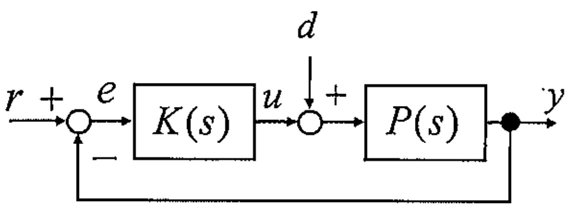
d
r
+
e
K(s)
u
+
P(s)
y
−

図3

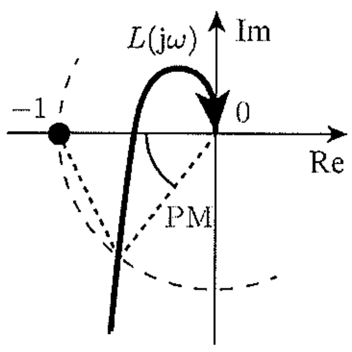
L(jω)
Im
−1
0
Re
PM

図4

草稿用紙
（切り離さないこと）

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 1

Suppose that a frequency spectrum $X(\omega)$ (ω is a real number representing angular frequency) is obtained by the Fourier transform of a continuous-time signal $x(t)$ (t is a real number representing time) as shown in Equation (I). Equation (II) shows the inverse Fourier transform of $X(\omega)$. j is the imaginary unit, and π is the circle ratio. Answer the following questions.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \tag{I}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ \exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{II}$$

(1) Obtain $X(\omega)$ when $x(t)$ is given as a time-shifted Dirac delta function $x(t) = \delta(t-\tau)$. In addition, obtain $x(t)$ when $X(\omega)$ is given as a frequency-shifted delta function $X(\omega) = \delta(\omega - \omega')$.

(2) Obtain $X(\omega)$ when $x(t)$ is given as a periodic delta series $x(t) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT)$ with the sampling period T. In addition, prove that this $X(\omega)$ also becomes a delta series by using that $x(t)$ is a periodic function and can be expanded by a Fourier series. Fourier series expansion is given as follows:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\ \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi m t}{T}\right), \tag{III}$$

$$c_m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\ \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi m t}{T}\right)\mathrm{d}t. \tag{IV}$$

(3) Suppose that $X(\omega)$ and $H(\omega)$ are obtained by the Fourier transform of continuous-time signals $x(t)$ and $h(t)$, respectively. In this case, prove that the Fourier transform of a convolution integral given by

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{V}$$

can be represented as

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \tag{VI}$$

(Continued on next page)

(4) A discrete-time signal $x[n]$ (n is an integer) is obtained by sampling a continuous-time signal $x(t)$ with a constant sampling period. The z-transform of $x[n]$ is defined as

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad , \quad z \in \mathbb{C}. \tag{VII}$$

(a) Derive the region of convergence of the z-transform of Equation (VII) when $x[n]$ is the unit step function given by $x[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 1 & (n \geq 0) \end{cases}$. In addition, express $X(z)$ in terms of a rational function when $X(z)$ is convergent.

(b) Derive the region of convergence of the z-transform of Equation (VII) when $x[n]$ is given by $x[n] = \exp(a\,|n|)$ (a is a real number). In addition, express $X(z)$ in terms of a rational function when $X(z)$ is convergent.

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 2

Consider the electric circuits shown in Figs. 1, 3, and 4, where A_1 is an ideal operational amplifier and A_2 is an operational amplifier having saturation output voltages $\pm V_s$. Note that the notations V_{in1}, V_{out1}, V_{in2}, V_{out2}, ..., R, and C in the figures represent the voltages of the input terminals and the output terminals, the resistances of the resistors, and the capacities of the capacitors, respectively. Assume that the electric charge of each capacitor at the initial time $t = 0$ is 0. Answer the following questions.

(1) Consider the electric circuit shown in Fig. 1. Find the expression for $V_{out1}(t)$, $0 \leq t$ using $V_{in1}(t)$.

(2) Consider the electric circuit shown in Fig. 1 and set $V_{in1}(t) = V_c(t)$, where $V_c(t)$ is a rectangular wave of period $2T$ shown in Fig. 2. Find the expression for $V_{out1}(t)$, $0 \leq t$ and draw the outline of $V_{out1}(t)$, $0 \leq t \leq 4T$.

(3) Consider the electric circuit shown in Fig. 3, where $C = \frac{T}{2R}$, $V_{in2}(t) = V_c(t)$, $V_c(t)$: the rectangular wave shown in Fig. 2, V_{ref}: constant, and $-V_s \leq V_{ref} \leq V_s$.

(a) Find the expression for $V_{out2}(t)$, $0 \leq t$.

(b) Find the expression for

$$D := \frac{1}{2T} \int_0^{2T} V_{out2}(t)\mathrm{d}t$$

as a function of V_{ref}.

(4) Consider the electric circuit shown in Fig. 4, where $C = \frac{T}{2R}$ and $V_{in3}(t) = V_c(t)$, $V_c(t)$: the rectangular wave shown in Fig. 2.

(a) Explain the uses and the feature of this electric circuit.

(b) Draw the outline of $V_{out3}(t)$, $0 \leq t \leq 20T$, where $V_{in4}(t) = V_s \sin(\omega t)$, $\omega := \frac{\pi}{10T}$.

(Continued on next page)

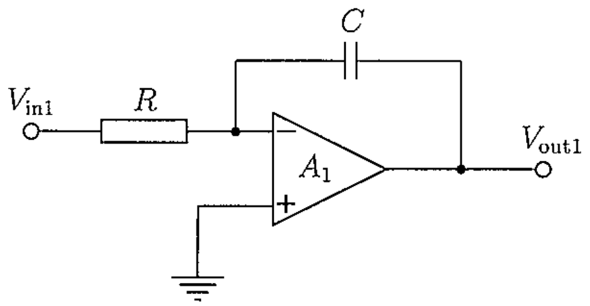

Fig. 1

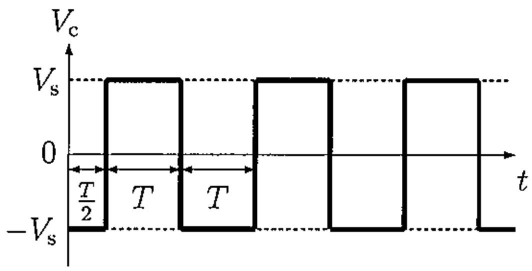

Fig. 2

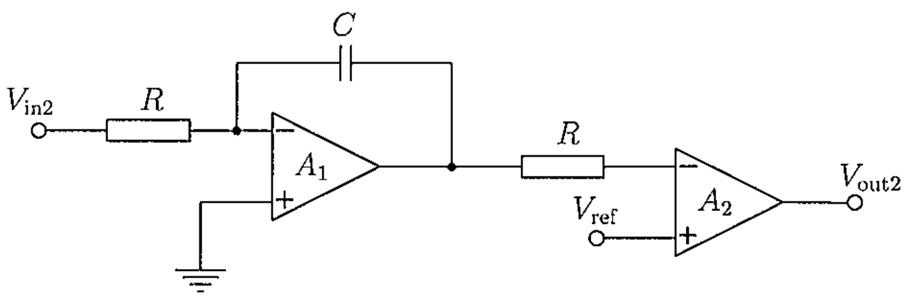

Fig. 3

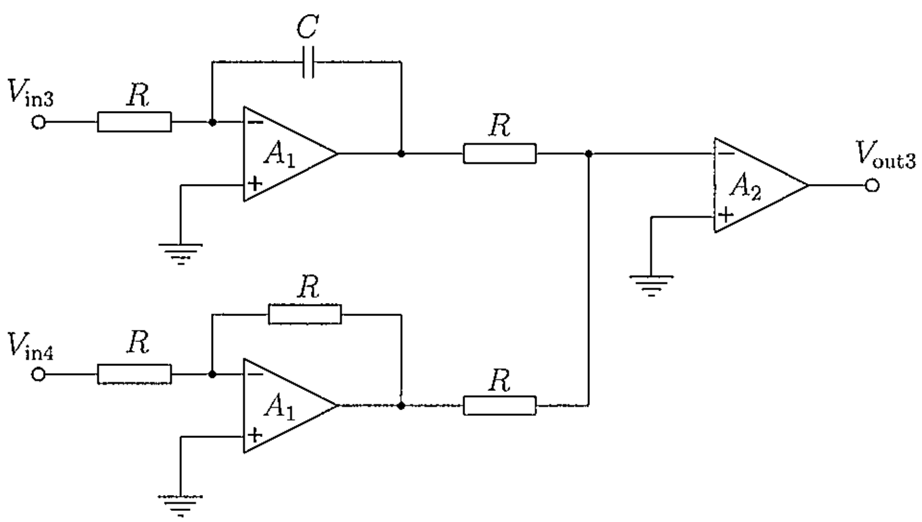

Fig. 4

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Problem 3

(1) In Fig. 1, consider a transfer function $P(s) = P_1(s)$. Suppose that $P_1(s)$ is a first order system and that the rise time is 0.44 and the steady state value is 2 in the unit step response. Find $P_1(s)$. The rise time in the step response is defined as the time required to rise from 10% to 90% of the steady state. Use $\ln 2 = 0.7$, $\ln 3 = 1.1$, and $\ln 5 = 1.6$, if necessary.

(2) In Fig. 1, consider a transfer function $P(s) = P_2(s)$. Suppose that $P_2(s)$ is a minimum phase system and that the magnitude of the Bode plot is given as in Fig. 2. Find $P_2(s)$.

(3) In Fig. 3, suppose that

$$P(s) = \frac{1-s}{s-p}, \; p > 1, \quad K(s) = K, \; 1 < K < p.$$

For the sensitivity function $S(s) = 1/(1+P(s)K(s))$, define the resonant peak as $M_{rS} = \max_{\omega \in R} |S(\mathrm{j}\omega)|$. Show that $p \leq 3$ implies $M_{rS} \geq 2$. For a stable $G(s)$, the following relation (the maximum modulus principle) may be used.

$$\max_{\omega \in R} |G(\mathrm{j}\omega)| = \max_{\mathrm{Re}(s) \geq 0} |G(s)|.$$

(4) In Fig. 3, let $L(s) = P(s)K(s)$ and $T(s) = L(s)/(1 + L(s))$ denote the loop transfer function and the complimentary sensitivity function, respectively. In Fig. 4, the vector locus of $L(s)$ and the phase margin of the system are shown. PM denotes the phase margin, and ω_{gc} and M_r denote the gain crossover frequency and the resonant peak of the complimentary sensitivity function, respectively. Answer the following questions.

(a) Express $|T(\mathrm{j}\omega_{gc})|$ with PM.

(b) Find M_r that achieves PM $\geq 45°$.

(Continued on next page)

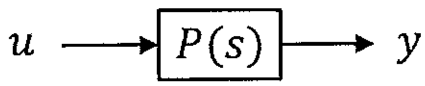

Fig. 1

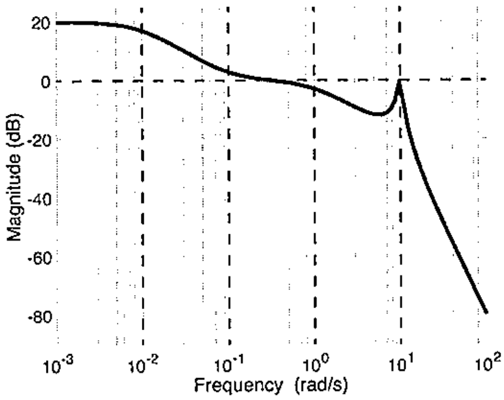

Fig. 2

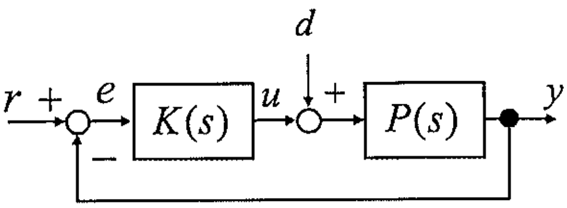

Fig. 3

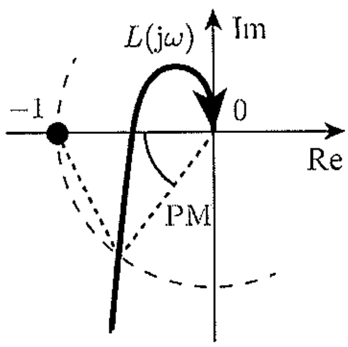

Fig. 4

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)

Draft paper
(Do not separate this from the booklet)