２０２１年度 大学院入学試験問題

2021 School Year Graduate School Entrance Examination
Problem Booklet

口述試験Ｂ／**Oral Examination B**

第１問から第６問のうち，１問のみを選択して解答せよ．
Answer one out of Problems 1-6.

試験時間 ／ Examination Time：　11：30〜12：30

（うち解答時間 20 分 ／ including 20 minutes for answering time）

注　意　事　項　／ Instructions

(1) 試験問題の内容に関する質問に対しては，原則として答えない．
No questions relating to the contents of the problems are acceptable in principle.

(2) 問題は第 1 問から第 6 問まであり，日本文は 2 頁から 9 頁，英文は 10 頁から 17 頁である．6 問のうち 1 問を日本語ないし英語で解答すること．
Six problems appear on pages 2 - 9 in Japanese and pages 10 - 17 in English in this PDF file. Answer one out of the six problems in Japanese or English.

(3) 解答に関係のない記号，符号などを記入した答案は無効とする．
Any answer sheet with marks or symbols unrelated to the answer will be invalid.

(4) 問題の解釈に複数の可能性が考えられる場合は，適宜言葉の定義や条件等を付加して解答してよい．
In the case that a problem can be interpreted in several ways, you may answer the problem adding suitable definitions or conditions.

(5) 問題解答用紙には最終解答のみでなく，計算や導出の過程を記述すること．論拠の不十分な解答は減点する．
Your answers must include calculation and derivation processes, not just the final conclusion. Lack of arguments will result in score deduction.

(6) 問題の撮影および他人との共有（インターネットへのアップロードを含む）は一切禁止する．発覚した場合受験自体を無効とする．
Taking pictures of the problems or sharing them with others (including uploading to the Internet) are prohibited without exception. Such acts will invalidate your examination results if found.

(7) 選択した問題を「第 1 問」のように解答用紙 1 枚目の最上部に明記すること．
Indicate your selected problem as “Problem 1” on the top of your first page of answer sheets.

第 1 問

連続時間信号 $f(t)$ とその Fourier 変換 $F(\omega)$ が，以下のように関係づけられるとする．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{2}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 実数値の連続時間信号 $x(t)$ および $y(t)$ の Fourier 変換 $X(\omega)$，$Y(\omega)$ の実部 $\mathrm{Re}[X(\omega)]$，$\mathrm{Re}[Y(\omega)]$ がそれぞれ以下で与えられるとする．

$$\mathrm{Re}\,[X(\omega)] = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\omega_0}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_0}{2} \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\,[Y(\omega)] = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{\omega_0}, & |\omega| \le \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases} \tag{4}$$

虚部 $\mathrm{Im}[X(\omega)]$，$\mathrm{Im}[Y(\omega)]$ はどちらも 0 とする．

(a) $x(t)$ を求め，その概形を描け．概形を描くにあたり，$x(t)$ の値を明示する必要はないが，$x(t) = 0$ となる t の値を明示すること．

(b) 以下の関係式が成り立つことを用いて，$y(t)$ を求めよ．

$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega_0} X(\omega) * X(\omega) \tag{5}$$

ここで，“$*$” は畳み込み演算を表す．

(2) 線形時不変システム $\mathcal{L}$ が以下の伝達関数 $H(\omega)$ を持つとする．

$$H(\omega) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega) \tag{6}$$

ここで，$\mathrm{sgn}(\cdot)$ は以下で定義される符号関数である．

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

(次のページに続く)

(a) $\mathcal{L}$ のインパルス応答 $h(t)$ を求めよ．以下の関係式を用いてよい．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}H(\omega) = -2\mathrm{j}\delta(\omega) \tag{8}$$

ここで，$\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である．

(b) 問い (1) の $y(t)$ を $\mathcal{L}$ に入力したときの出力信号を $z(t)$ とする．ここで，$y(t)$ を実部，$z(t)$ を虚部に持つような信号 $w(t) = y(t) + \mathrm{j}z(t)$ を定義したとき，$w(t)$ の Fourier 変換 $W(\omega)$ を求め，$|W(\omega)|$ の概形を描け．

第 2 問

オペアンプを使用した回路に関する以下の問いに答えよ．ただし，オペアンプは全て理想特性をもつものとする．

(1)

(a) 図 1 にオペアンプ，抵抗 R_1, R_2 により構成される回路を示す．V_o を求めよ．

(b) 図 2 にオペアンプ，抵抗 R，キャパシタ C，により構成される回路を示す．$V_o(t)$ を求めよ．ただし，キャパシタ C は初め放電状態にあり，時刻 $t < 0$ で $V_i(t) = 0$ とする．

(c) 図 3 にオペアンプ，抵抗 R_1, R_2，キャパシタ C により構成される低域通過フィルタを示す．この回路の周波数特性を求め，カットオフ周波数を 100 Hz とする C を求めよ．

(2)

(a) 図 4 にオペアンプ，抵抗 R_1, R_2 により構成されるヒステリシスコンパレータを示す．この回路に仮想接地の原理は適用できるか答え，非反転入力端子への入力 V_+ を V_o，V_i を用いて示せ．

(b) 図 4 の回路において，出力が論理 1 のとき入力 V_i を連続的に下げていったときに出力が論理 0 となる直前の入力 V_L を求めよ．また，出力が論理 0 のとき入力 V_i を連続的に上げていったときに出力が論理 1 となる直前の入力 V_H を求めよ．ただし，論理 1 の時の出力を V_s，論理 0 の時の出力を $-V_s$ とする．

（次のページに続く）

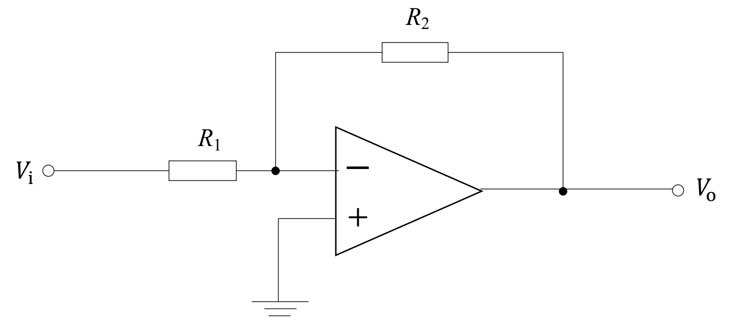

図 1

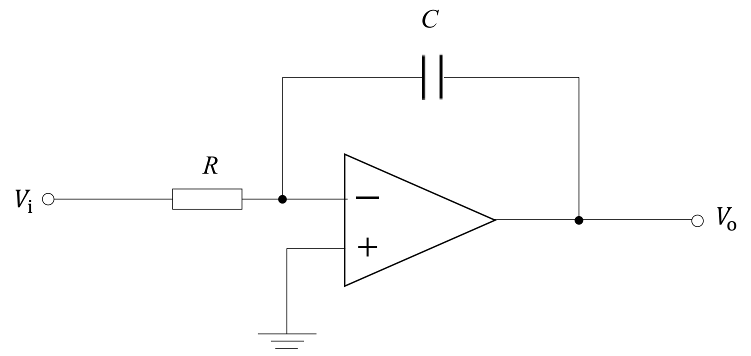

図 2

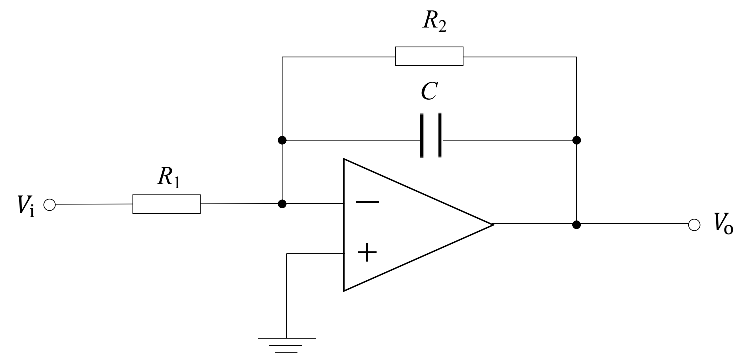

図 3

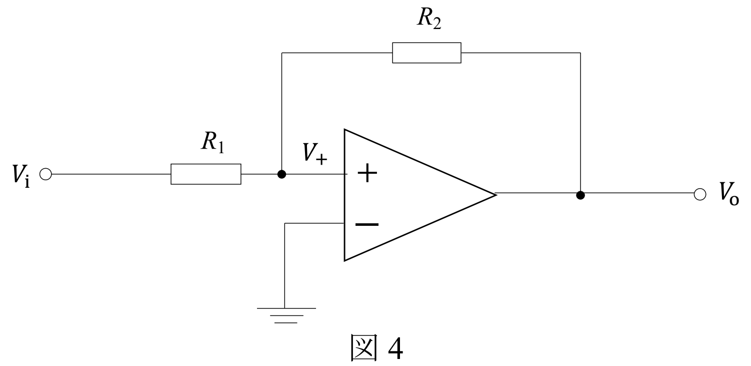

図 4

第 3 問

(1) 図 1 に示す制御系に対して， 以下の問いに答えよ．

(a) 伝達関数 $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$を求めよ．

(b) $X(s)$が単位ステップ信号の場合，定常偏差を C_1 と C_2 を用いて表せ．
ただし，偏差$E(s) = X(s) - Y(s)$ とする．

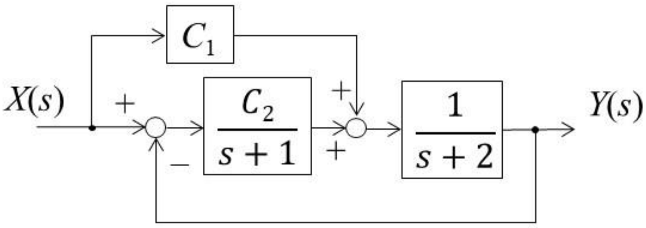

図 1

(2) 次の状態空間表現された制御対象を考える．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [c \quad -1]x(t)$$

ただし，$x(t)$は状態変数ベクトル，$u(t)$は入力，$y(t)$は出力とする．
以下の問いに答えよ．

(a) システムが可制御および可観測となる b と c の条件を求めよ．

(b) $b = 3$ の時，状態フィードバック$u(t) = Kx(t)$ により，閉ループ系の極を -2，-3とするKを求めよ．

第4問

(1) 以下の式 (1) に示すブール関数（論理関数）を考える．

$$f(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z \tag{1}$$

(a) $f(x, y, z)$ の真理値表を示せ．

(b) $f(x, y, z)$ を簡単化した積和形式で示せ．

(c) $f(x, y, z)$ を簡単化した和積形式で示せ．

(d) $f(x, y, z)$ の双対関数 $f_d(x, y, z) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}$ を簡単化した積和形式で示せ．

(2) 12 ビットのアドレス空間とバイトアドレッシングを用いたプロセッサのキャッシュメモリを考える．このキャッシュのサイズは 512 バイト，ラインサイズは 32 バイト，連想度は 2，置き換えアルゴリズムは LRU を仮定する．

(a) このキャッシュにアクセスする際のメモリアドレスのタグ部，インデックス部，ラインオフセット部はそれぞれ何ビットになるかを答えよ．

(b) キャッシュが空である初期状態から，プロセッサが 0x24C，0x554，0x258，0x26C，0x540 のアドレス順でメモリをアクセスしたとする．キャッシュヒットするアクセスをすべて答えよ．ただし，0x で始まる数値は 16 進数を表す．

第 5 問

図 1 に示すように，伸び縮みしない長さℓ の軽い糸の上端 O を固定し，下端 P に質量 M，半径 a ($\ll \ell$) の一様な薄い円板を吊り下げ，平衡点近傍で微小振動させる．糸の上端 O を原点とし，水平方向に x 軸，鉛直方向に y 軸をとる．また，糸と鉛直方向のなす角をθ，糸の下端 P と円板の重心 Q を結ぶ線分 PQ が鉛直方向となす角をφとする．糸および円板の運動は xy 平面内に限られるものとし，重力加速度はy 軸の負方向にgとする．また，$\theta \simeq 0, \varphi \simeq 0$ とみなせるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 円板の重心 Q の位置 (x, y) を，ℓ, a, θ, φ を用いて表せ．

(2) 円板の重心 Q まわりの慣性モーメントを求めよ．

(3) 円板の運動方程式を示せ．ただし，$|\alpha| \ll 1$において，$\sin\alpha \simeq \alpha,\ \cos\alpha \simeq 1$としてよい．

(4) θおよび φ が，同一の振動数$\omega\,(>0)$を用いて以下の式で表されるとする．

$$\theta = A\sin\omega t\ ,\varphi = B\sin\omega t \qquad (A, B：定数)$$

(a) ω^2 を求めよ．

(b) 上で求めたω^2 について，$\dfrac{A}{B}$ の正負を示せ．

ただし，$|z| \ll 1$において，$(1+z)^{\frac{1}{2}} \simeq 1+\frac{z}{2}$ としてよい．

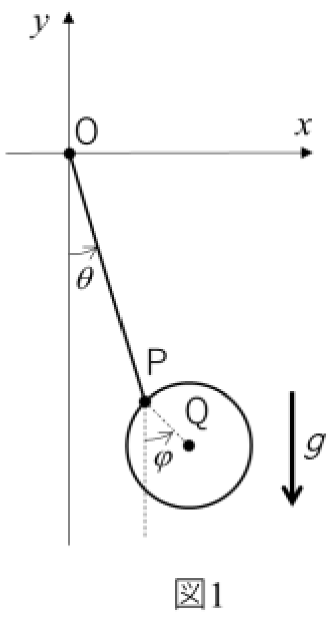

図1

第 6 問

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{R}^+$ を正の実数の集合とし，平均 $\mu \in \mathbb{R}$，分散 $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ の正規分布を $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ で表す．このとき正規分布の確率密度関数は次のように定義される．

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

また，関数 f を $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ としたとき，$\mathbb{E}_X[f(X)]$ を確率変数 X についての確率分布 $P(X)$ に関する期待値と定義する．
以下の設問では，確率変数 X の確率分布 $P(X)$ が $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ であり，$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 以下の期待値を a, b, μ, σ を用いて表せ．

　(a) $\mathbb{E}_X[aX + b]$

　(b) $\mathbb{E}_X[(aX + b)^2]$

(2) $c^2 \in \mathbb{R}^+$ とする．確率変数 X が与えられたときの確率変数 Y の条件付き分布 $P(Y|X)$ が $\mathcal{N}(aX + b, c^2)$ であるとき，Y の周辺分布 $P(Y)$ の平均および分散を a, b, c, μ, σ を用いて表せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上の確率分布 $P(X)$，$Q(X)$ の確率密度関数がそれぞれ $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で与えられるとき，$Q(X)$ の $P(X)$ に対する Kullback–Leibler ダイバージェンスは以下のように定義される．

$$D_{\mathrm{KL}}(Q(X) \| P(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

$m \in \mathbb{R}, s^2 \in \mathbb{R}^+$ に対し，$Q(X)$ が $\mathcal{N}(m, s^2)$ であるとき，Kullback–Leibler ダイバージェンス $D_{\mathrm{KL}}(Q(X) \| P(X))$ を μ, σ, m, s を用いて表せ．

Problem 1

A continuous-time signal $f(t)$ and its Fourier transform $F(\omega)$ are related as

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}t, \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}\omega. \quad (2)$$

Answer the following questions.

(1) The Fourier transforms of real-valued continuous-time signals $x(t)$ and $y(t)$ are denoted as $X(\omega)$ and $Y(\omega)$, respectively. Their real parts, $\mathrm{Re}[X(\omega)]$ and $\mathrm{Re}[Y(\omega)]$, are given by

$$\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right] = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\omega_0}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_0}{2} \end{cases}, \quad (3)$$

$$\mathrm{Re}\left[Y(\omega)\right] = \begin{cases} 1 - \frac{|\omega|}{\omega_0}, & |\omega| \le \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}. \quad (4)$$

Their imaginary parts, $\mathrm{Im}[X(\omega)]$ and $\mathrm{Im}[Y(\omega)]$, are 0.

(a) Derive $x(t)$ and sketch its outline. For the outline, although it is not necessary to indicate the values of $x(t)$, clearly indicate the exact values of t where $x(t) = 0$.

(b) Derive $y(t)$ by using the following relation:

$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega_0} X(\omega) * X(\omega), \quad (5)$$

where "$*$" denotes convolution.

(2) Suppose that a linear time-invariant system $\mathcal{L}$ has the following transfer function $H(\omega)$:

$$H(\omega) = -\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\omega), \quad (6)$$

where $\mathrm{sgn}(\cdot)$ is the sign function defined as

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

(Continued on Next Page)

(a) Derive the impulse response of $\mathcal{L}$ denoted as $h(t)$. The following relation can be used:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} H(\omega) = -2\mathrm{j}\delta(\omega). \tag{8}$$

Here, $\delta(\cdot)$ is the Dirac delta function.

(b) Let $z(t)$ be the output signal of $\mathcal{L}$ for the input signal $y(t)$ of Question (1). A signal whose real and imaginary parts are $y(t)$ and $z(t)$, respectively, is defined as $w(t)$, i.e., $w(t) = y(t) + \mathrm{j}z(t)$. Derive the Fourier transform of $w(t)$, $W(\omega)$, and sketch the outline of $|W(\omega)|$.

Problem 2

Answer the following questions about electric circuits using operational amplifiers. Assume that all the operational amplifiers have ideal characteristics.

(1)

(a) Figure 1 shows a circuit consisting of resistances R_1, R_2, and an operational amplifier. Determine the relationship between output voltage V_o and input voltage V_i.

(b) Figure 2 shows a circuit consisting of resistance R, capacitance C, and an operational amplifier. Obtain $V_o(t)$. The capacitance C is initially discharged, and $V_i(t) = 0$ when $t < 0$.

(c) Figure 3 shows a low-pass filter consisting of resistances R_1, R_2, capacitance C, and an operational amplifier. Determine the frequency characteristics of this circuit, and obtain the value of the capacitance C that sets the cutoff frequency to 100 Hz.

(2)

(a) Figure 4 shows a hysteresis comparator consisting of resistances R_1, R_2. Answer whether the concept of virtual short is applicable to this circuit or not. Next, obtain the voltage of non-inverting input V_+, where V_i is input voltage, and V_o is output voltage.

(b) In Fig. 4, determine the input voltage threshold V_L at which the output of this circuit switches from logic 1 to logic 0 by continuously dropping V_i. Also determine the input voltage threshold V_H at which the output of this circuit switches from logic 0 to logic 1 by continuously raising V_i. Here, V_s and $-V_s$ are output voltages that correspond to logic 1 and logic 0, respectively.

(Continued on Next Page)

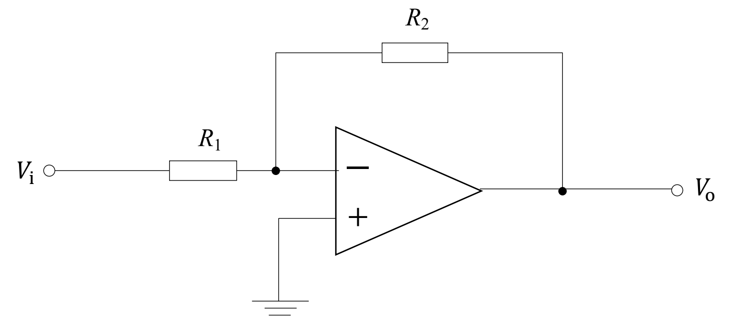

Fig. 1

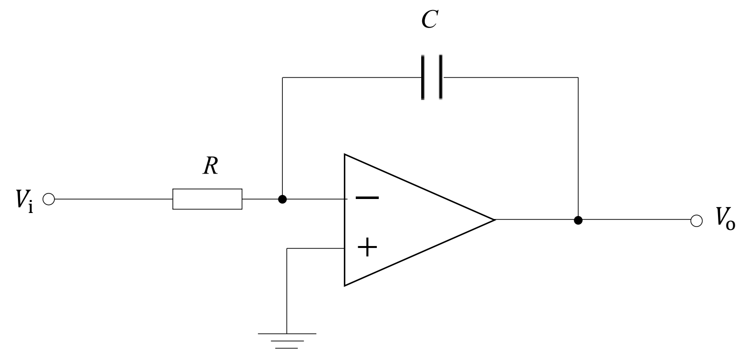

Fig. 2

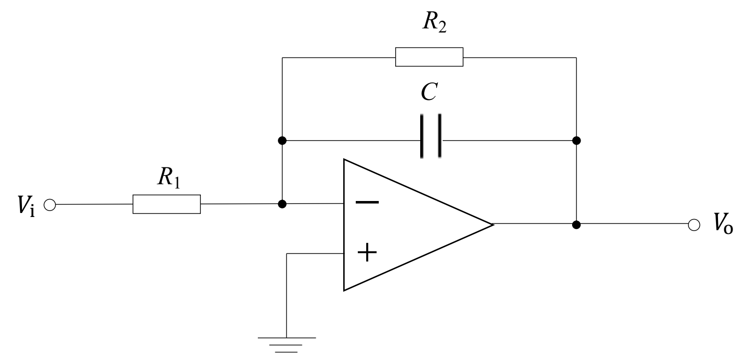

Fig. 3

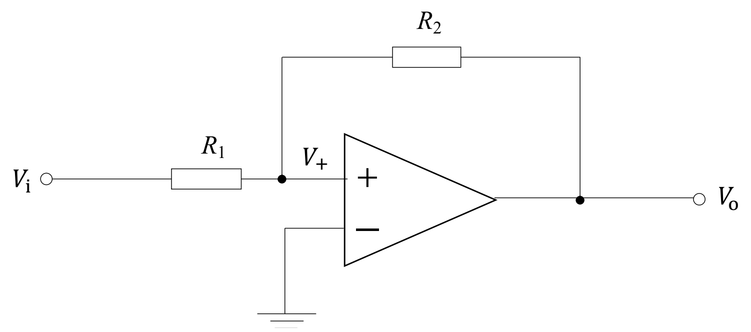

Fig. 4

Problem 3

(1) A control system is shown in Fig.1. Answer the following questions.

(a) Determine the transfer function $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(b) Determine the steady-state error for a unit step input $X(s)$ in terms of C_1 and C_2, where the error signal $E(s) = X(s) - Y(s)$.

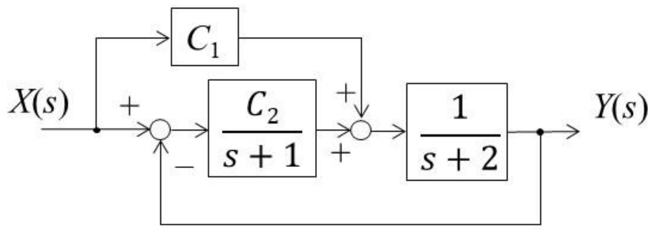

Fig.1

(2) Consider a plant given by a state space representation;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c & -1 \end{bmatrix} x(t),$$

where $x(t)$, $u(t)$, and $y(t)$ are the state vector, the input, and the output, respectively. Answer the following questions.

(a) Show the conditions on b and c so that the system is controllable and observable.

(b) When the value of $b = 3$, and for a state feedback $u(t) = Kx(t)$, find the value of K which assigns the poles of the closed loop system to -2 and -3.

Problem 4

(1) Consider the following Boolean function (logic function) $f(x, y, z)$ shown in Equation (1).

$$f(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot z \tag{1}$$

(a) Give a truth table of $f(x, y, z)$.

(b) Show the Boolean expression of $f(x, y, z)$ in a simplified sum-of-products form.

(c) Show the Boolean expression of $f(x, y, z)$ in a simplified product-of-sums form.

(d) Show the dual function $f_d(x, y, z) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}$ of $f(x, y, z)$ in a simplified sum-of-products form.

(2) Consider a cache memory for a processor using 12-bit address space and byte addressing. Assume that the size, the line size, the set associativity, and the replacement algorithm of the cache are 512 bytes, 32 bytes, 2 ways, and LRU, respectively.

(a) Determine the number of bits in each of the tag, the index, and the line offset portions of a memory address to access the cache.

(b) Suppose that the cache is initially empty and then the processor accesses the memory with addresses of 0x24C, 0x554, 0x258, 0x26C, and 0x540 in this order. Identify all the accesses that hit in the cache. Note that the prefix "0x" indicates that the following number is hexadecimal.

Problem 5

As shown in Fig. 1, a non-elastic, negligible weight thread of length ℓ is fixed at the upper end O while a thin and homogeneous circular disk of mass M and radius a ($\ll \ell$) is hung on the lower end P of the thread to induce small oscillations around its equilibrium. Taking the upper end of the thread O as the Cartesian origin, we take the x-axis horizontally and the y-axis vertically. Let θ be the angle formed between the vertical axis and the thread, and φ be the angle formed between the vertical line and the line segment PQ that connects P and the center of gravity of the disk denoted by Q. Assume the thread and the disk move in the xy-plane. Denote the absolute value of the gravitational acceleration by g, with its direction along the negative direction of the y-axis. Assume that $\theta \simeq 0$, $\varphi \simeq 0$. Answer the following questions.

(1) Describe the position (x, y) of the center of gravity Q of the disk as a function of ℓ, a, θ and φ.

(2) Find the moment of inertia of the disk about the center of gravity Q.

(3) Derive the equations of motion of the disk.

Note that $\sin\alpha \simeq \alpha,\ \cos\alpha \simeq 1$ for $|\alpha| \ll 1$.

(4) Assume that θ and φ are described by using the same frequency ω (>0) as follows:

$$\theta = A\sin\omega t\ ,\ \varphi = B\sin\omega t \quad (A, B\text{: constant}).$$

(a) Derive ω^2.

(b) Find the sign of $\dfrac{A}{B}$ for ω^2 derived in (a).

Note that $(1+z)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{z}{2}$ for $|z| \ll 1$.

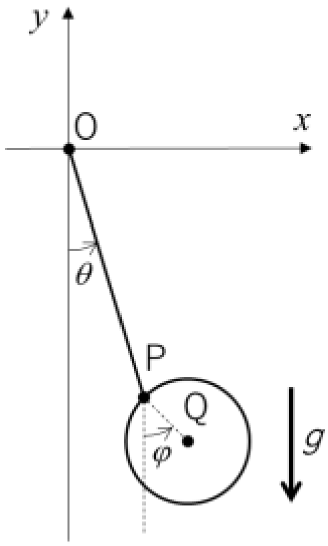

Fig. 1

Problem 6

Let $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^+$ be the sets of real numbers and positive real numbers, respectively, and let $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ denote the normal distribution whose mean and variance are $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, respectively. The probability density function of the normal distribution $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ is represented as follows:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

For a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}_X[f(X)]$ is defined as the expectation of a random variable X over the probability distribution $P(X)$.
Suppose that $P(X)$ is $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ and $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Answer the following questions,

(1) Derive the following expectations by using a, b, μ, and σ.

  (a) $\mathbb{E}_X\left[aX + b\right]$

  (b) $\mathbb{E}_X\left[(aX + b)^2\right]$

(2) Suppose that $c^2 \in \mathbb{R}^+$, and $P(Y|X)$ is the conditional distribution of a random variable Y given X.
When $P(Y|X)$ is a normal distribution given by $\mathcal{N}(aX + b, c^2)$, derive the mean and variance of the marginal distribution $P(Y)$ by using a, b, c, μ, and σ.

(3) Suppose that two probability density functions of $P(X)$ and $Q(X)$ over $\mathbb{R}$ are $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respectively. The Kullback–Leibler divergence from $P(X)$ to $Q(X)$ is defined as follows:

$$D_{\mathrm{KL}}(Q(X) \| P(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)} \mathrm{d}x.$$

When $Q(X)$ is $\mathcal{N}(m, s^2)$, $m \in \mathbb{R}$, and $s^2 \in \mathbb{R}^+$, derive Kullback–Leibler divergence $D_{\mathrm{KL}}(Q(X) \| P(X))$ by using μ, σ, m, and s.