電子情報学専攻 専門

2024 年 8 月 19 日(月) 10 時 00 分〜12 時 30 分実施

問題数 5 題（このうち 3 題を選択して解答すること）

注意

1. 指示があるまで，この問題を開いてはならない。

2. この問題冊子の本文は表紙・空白ページを除き全部で 6 頁ある。落丁，乱丁，印刷不鮮明なものがあれば申し出ること。

3. 3 題を選択して解答せよ。5 題中どの 3 題を選択してもよい。1 枚の解答用紙に 1 つの問題の解答を書くこと。必要があれば裏面を使用してよい。

4. 解答用紙上部左側に解答した問題の番号を書くこと。また解答用紙上部右側の記入欄に受験番号を必ず記入すること。答案の提出前に，これらを記入したかを必ず確認すること。

5. 答案は必ず 3 題分を提出すること。解答した問題が 3 題未満であっても 3 題のそれぞれについて問題番号と受験番号を記入した解答用紙を提出のこと。

6. 解答は日本語または英語で記述すること。

7. この問題冊子と計算用紙は，試験終了後回収する。持ち帰ってはならない。

第1 問

図のように，電源 E，抵抗 R_1, R_2，インダクタンス L_1，キャパシタンス C_2，および巻き数比 $n:1$ の理想的な変圧器（ n は正の自然数）を含む回路を考える．ラプラス変数と時刻をそれぞれ s，t とする．以下の問いに答えよ．

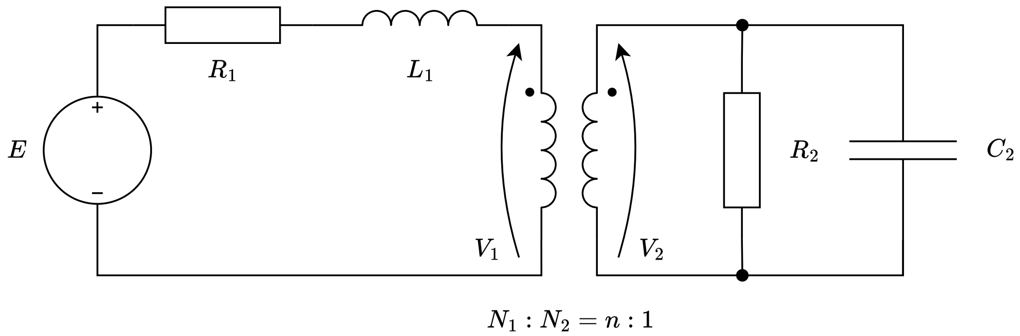
(1) 電源 E の電圧 $v_0(t)$ は振幅 ϵ，角周波数 ω の正弦波 $v_0(t) = \epsilon \sin(\omega t)$ として表されるとする．変圧器の二次側の電圧 $V_2(s)$ を，一次側の電圧 $V_1(s)$ を用いて表せ．

(2) (1) の条件下で，変圧器の二次側のインピーダンス $Z_2(s)$ を求めよ．

(3) (1) の条件下で，電源から見た回路全体のインピーダンス $Z_0(s)$ を求めよ．

(4) (1) の条件下で，二次側の電圧 $V_2(s)$ を電源電圧のラプラス変換 $V_0(s)$ を用いて表せ．

(5) 電源 E の電圧 $v_0(t)$ が単位ステップ関数 $v_0(t) = u(t)$ として表される場合について考える．$R_1 = R_2 = 1$ [Ω]，$L_1 = 1$ [H]，$C_2 = 1$ [F] のとき，変圧器二次側の電圧時間変化 $v_2(t)$ を示せ．



図

第2 問

図 1 に示す同期式順序回路を考える．ここで，D_0, D_1, D_2 は各 D Flip Flop (DFF) の入力信号，Q_0, Q_1, Q_2 は対応する各 DFF の出力信号を表す．入力 x は 0 か 1 の値をとる．以下の問いに答えよ．

(1) D_0, D_1, D_2 を，Q_0, Q_1, Q_2 と入力 x の中から必要なものを用いた論理式で示せ．

(2) 図 1 の回路の状態を適切に定義し，状態遷移表を作成せよ．ただし，入力 x が 1 の場合のみを考えよ．

(3) 図 1 の回路の状態遷移図をミーリーグラフの形式で作成せよ．ただし，入力 x が 0 の場合のみを考えよ．

(4) 出力 z がクロックに応じてどのように変化するか述べよ．入力 x は 1 であり，回路中の各 DFF は出力が 0 となるよう初期化されるとする．

(5) 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0 をこの順に出力する同期式順序回路を設計し，MIL 記号 (図 2) を用いて図示せよ．設計に用いることができる素子の種類は NOT，NAND，NOR，DFF とする．この回路は入力を持たず，クロックが続く限り，1, 1, 1, 0, 1, 0, 0 を 7 クロックサイクル周期で繰り返し出力する．また，回路中の各 DFF は出力が 0 となるよう初期化されるとする．

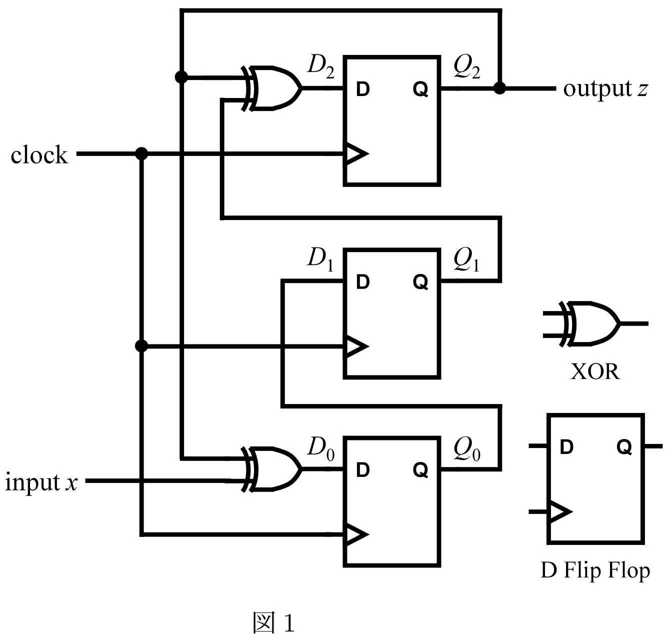


図 1

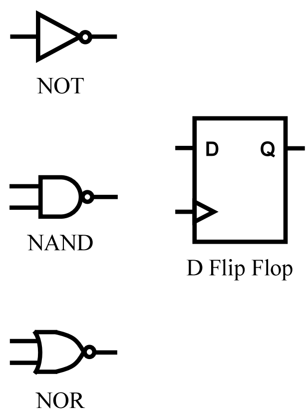


図 2

第3 問

最小全域木 (Minimum Spanning Tree, MST）問題とは, V を頂点集合, E をエッジ集合とし, 各エッジに重みが与えられている無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき, 以下の条件を満たす部分グラフを 1 つ見つける問題である.

- グラフ G のすべての頂点 V を含む.
- サイクル（閉路）が存在しない, 木の構造である.
- エッジの重みの総和が最小である.

解答にあたっては, 以下の仮定を前提とすること.

- ソート関数を使う場合には, 長さ n の配列に対して $O(n \log n)$ の計算量を仮定すること.
- 各頂点がどの集合に属しているかの判定や, 2 つの異なる集合の統合操作は, 例えば互いに素な集合データ構造（Union-Find）を用いることで定数時間で行えること.
- 優先度付きキューを使用する場合には, ヒープによって実装されたものを使うこと.

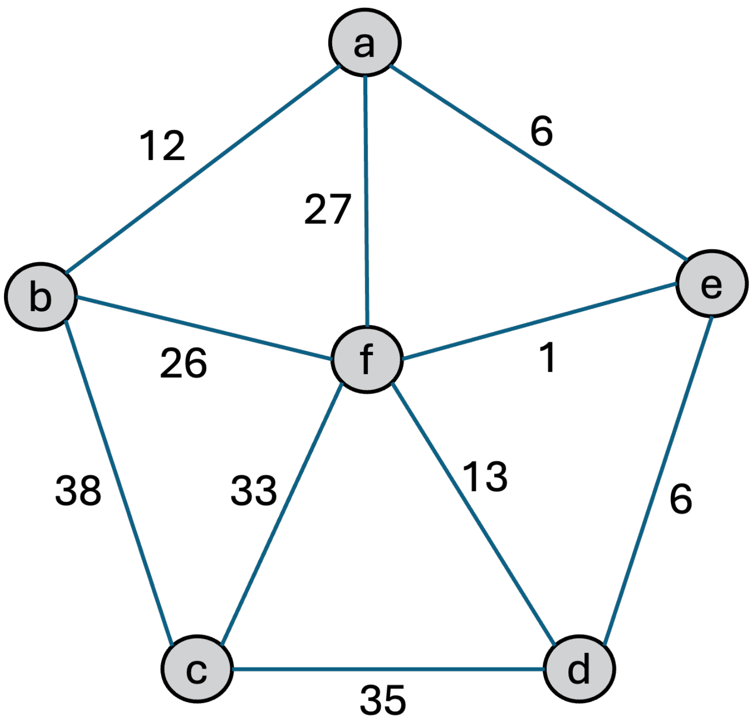
以下の問いに答えよ.

(1) 最小全域木問題を解くアルゴリズムの方針とその擬似コードを簡潔に示せ. なお, アルゴリズムは決定的かつ時間計算量が $O(|E| \log |V|)$ となるようにせよ. $|E|$ は集合 E の要素数, $|V|$ は集合 V の要素数を示す.

(2) (1) で示したアルゴリズムを用いて図のグラフの最小全域木とエッジの重みの総和を示せ.

(3) 全域木の中でエッジの重みの和が 2 番目に小さな全域木 (以降, Second MST と呼ぶ）を求めるアルゴリズムの方針とその擬似コードを簡潔に示せ. また, 時間計算量を示せ.

(4) (3) で示したアルゴリズムを用いて図のグラフの Second MST とエッジの重みの総和を示せ.



図

第4 問

D 次元ベクトルを入力としスカラー値を出力するモデルを学習する問題を考える．以下，$\top$ はベクトルおよび行列の転置，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{R}^D$ は D 次元実数の列ベクトル全体の集合，$\mathbb{R}^{D\times D}$ は D 次の実数正方行列全体の集合をそれぞれ表す．訓練データとして，N 個の D 次元入力ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ と，それぞれに対応する出力 $y_1, \ldots, y_N$ が与えられる．ここで $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^D$ および $y_i \in \mathbb{R}$ である（ $1 \leq i \leq N$）．また，各入力ベクトルを行として縦に並べて構成した行列を $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N]^\top$ と書く．さらに，出力をまとめて $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_N]^\top$ と書く．これらをもとに D 次元のパラメータ $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^D$ を学習する．任意の入力データ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^D$ が与えられたとき，その出力を $\hat{y} = \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}$ と推定する．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) i 番目の訓練データの入力 $\boldsymbol{x}_i$ に対し，学習した $\boldsymbol{\beta}$ による推定結果を $\hat{y}_i = \boldsymbol{\beta}^\top \boldsymbol{x}_i$ とする（ $1 \leq i \leq N$）．真の出力 y_i と推定結果 $\hat{y}_i$ の誤差を $e_i = y_i - \hat{y}_i$ と書く．このとき，誤差 e_i の二乗和 $E = \sum_{i=1}^N e_i^2$ を，$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y}$ を用いて表せ．

(2) E を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ が一意に求まる必要十分条件を求めよ．また，その際に得られる $\boldsymbol{\beta}$ を書け．ここで，変数 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^D$，定数 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^D$，および定数 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{D\times D}$ に対し，以下の関係式が成り立つことを用いても良い．

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b},$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{C} \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^\top)\boldsymbol{a}.$$

(3) E を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ が一意に求まらない場合，入力データ $\boldsymbol{X}$ がどのような特性を持つか，定性的に述べよ．

(4) i 番目の訓練データに対し重要度 $w_i > 0$ が与えられるとする（ $1 \leq i \leq N$）．この重要度を考慮した誤差二乗和を $E_w = \sum_{i=1}^N w_i e_i^2$ とする．E_w を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ が一意に求まる必要十分条件を求めよ．また，その際に得られる $\boldsymbol{\beta}$ を書け．必要に応じて新たに変数を定義しても良い．

(5) 変数が下記の値をとるとき，E_w を最小化する $\boldsymbol{\beta}$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &= [1, 0, 1]^\top, \quad y_1 = 2, \quad w_1 = 1, \\
\boldsymbol{x}_2 &= [0, 1, 1]^\top, \quad y_2 = 3, \quad w_2 = 1, \\
\boldsymbol{x}_3 &= [2, 0, 1]^\top, \quad y_3 = 3, \quad w_3 = 2, \\
\boldsymbol{x}_4 &= [1, 1, 0]^\top, \quad y_4 = 1, \quad w_4 = 1.
\end{aligned}$$

第5 問

離散時間信号処理に関する以下の問いに答えよ．

(1) アンチエイリアシングフィルタの機能と役割について簡潔に説明せよ．

(2) 線形時不変，かつ因果的な離散時間信号処理システム L について，その伝達関数が以下で表されるとする．

$$H(z) = \frac{\alpha z^2}{\alpha\beta z^2 - \alpha\beta z + \beta - \gamma}$$

ただし，z は複素変数，α, β, γ は実定数であり $\alpha, \beta > 0$ を満たす．このとき，L に対する離散時間信号の入力 $x[n]$ と出力 $y[n]$ の関係を表す差分方程式を求めよ．ただし n は整数とする．

(3) (2) において，$\alpha = 4, \beta = 1$ のとき，L が安定となるような γ の範囲を求めよ．

(4) (2) において，$\alpha = 4, \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ のとき，L における振幅特性 $|H(e^{j\Omega})|$ と位相特性 $\angle H(e^{j\Omega})$ を求めよ．ただし，j は虚数単位，Ω は角周波数である．

(5) (2) において，$\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{9}$ のとき，L のインパルス応答 $h[n]$ を以下の離散時間単位ステップ信号 $u[n]$ を用いて表せ．

$$u[n] = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$