平成31年度

東京大学大学院情報理工学系研究科 コンピュータ科学専攻 入学試験問題

専門科目 II

平成30年8月20日

15:45 – 17:15

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.

(2) 6 題の中から 2 題を選んで答えよ. 問題ごとに 1 枚の解答用紙を使用すること.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

Specialized Subjects II

15:45 – 17:15, August 20, 2018

Entrance Examination (AY 2019)

Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Technology
The University of Tokyo

Notice:

(1) Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) Choose and answer 2 problems out of the following 6 problems. Use one answer sheet for one problem.

(3) Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

直交座標系において，2 次元の点列 $V = [v^1, v^2, \ldots, v^n]$ $(n \geq 3)$, $v^i = (v_x^i, v_y^i)$ が与えられているものとする．この時，隣り合う 2 点 v^i, v^{i+1} $(1 \leq i \leq n-1)$ および最後と最初の点 v^n, v^1 を辺で結んで構成される多角形 M について考える．多角形 M は凸であるとは限らない．辺同士は端点以外の共通点を持たず，すべての i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ に対して $v^i \neq v^j$ が成り立つものとする．また，$v^1, v^2, \ldots, v^n$ のどの 3 点も一直線上にはないものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 点列の向きが時計回りであるか，あるいは反時計回りであるかを判定する方法を説明せよ．ただし，点列 $[(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)]$ の向きを反時計回りとする．

(2) 多角形 M の面積を V の座標 $v^i = (v_x^i, v_y^i)$ $(1 \leq i \leq n)$ の式として表現せよ．

(3) 新しい点 $p = (p_x, p_y)$ が与えられたときに，p が多角形 M の内部にあるか外部にあるかを判定する方法を説明せよ．頂点 p が多角形 M の境界上にある場合については考えなくてよい．

(4) 多角形 M の内部に交差のないように頂点間を結ぶ辺を加えていくことで，多角形 M の内部を 3 角形に分割する．この時，3 角形の数を n の式として表せ．また，その式が任意の $n \geq 3$ について成立することを証明せよ．

(5) 長さの等しい 2 つの点列 V と U が与えられているものとする．V に対してある線形変換 A を適用して得られる点列 $\widetilde{V}$ と U の距離が最小になるようにしたい．なお，$A(v^i) = (\tilde{v}_x^i, \tilde{v}_y^i)$ とすると，$\widetilde{V}$ と U の距離は $\sum_{i=1}^{n} \{(\tilde{v}_x^i - u_x^i)^2 + (\tilde{v}_y^i - u_y^i)^2\}$ で与えられるものとする．そのような線形変換 A を V と U の頂点座標 $v^i = (v_x^i, v_y^i), u^i = (u_x^i, u_y^i)$ $(1 \leq i \leq n)$ の式として表現せよ．

Problem 1

Assume that we have a sequence of 2-dimensional vertices $V = [v^1, v^2, \dots, v^n]$ $(n \geq 3)$, $v^i = (v_x^i, v_y^i)$ in an orthogonal coordinate system. Let M be the polygon surrounded by the edges constructed by connecting the adjacent vertices v^i, v^{i+1} $(1 \leq i \leq n-1)$ as well as the last and first vertices v^n, v^1. The polygon M may not be convex. Assume that the edges meet only at their endpoints, and that $v^i \neq v^j$ holds for all i, j $(1 \leq i < j \leq n)$. Assume also that no three vertices among $v^1, v^2, \dots, v^n$ lie on the same line. Answer the following questions.

(1) Explain a method to judge whether the orientation of the vertex sequence is clockwise or counterclockwise. We call the orientation of a vertex sequence $[(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)]$ counterclockwise.

(2) Give the area of the polygon M as an expression of V's coordinates $v^i = (v_x^i, v_y^i)$ $(1 \leq i \leq n)$.

(3) Assume that a new vertex $p = (p_x, p_y)$ is given. Explain a method to judge whether the vertex p is inside the polygon M or not. You need not consider the case where the vertex p is on the boundary of the polygon M.

(4) Consider a process of dividing the interior of the polygon M into triangles by adding edges between some of the vertices of the polygon M so that the new edges are inside the polygon M, and do not intersect. Give the number of triangles as an expression of n. Prove that the expression is valid for any $n \geq 3$.

(5) Assume that two vertex sequences V and U with equal length are given. We apply a linear transformation A to V so that the distance between the resulting $\widetilde{V}$ and U is minimum. Here, the distance between $\widetilde{V}$ and U is defined as $\sum_{i=1}^{n}\{(\tilde{v}_x^i - u_x^i)^2 + (\tilde{v}_y^i - u_y^i)^2\}$, where $A(v^i) = (\tilde{v}_x^i, \tilde{v}_y^i)$. Give such a linear transformation A as an expression of V and U's coordinates $v^i = (v_x^i, v_y^i), u^i = (u_x^i, u_y^i)$ $(1 \leq i \leq n)$.

問題 2

平均 $\mu \in \mathbb{R}$，分散 $v > 0$ の正規分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2v}\right)$$

で与えられる．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ をこの確率分布に独立に従う確率変数とする．ただし n は 2 以上の整数である．(μ, v) を以下の損失関数 $L(\mu, v)$ に基づいて推定することを考える．

$$L(\mu, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(X_i - \mu)^2}{v} + \log v \right) + \frac{\lambda}{v}$$

ここで log は自然対数であり，正則化パラメータ λ は正の実数とする．損失関数 $L(\mu, v)$ を最小にする (μ, v) を $(\hat{\mu}, \hat{v})$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $(\hat{\mu}, \hat{v})$ を n，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ と λ を用いて表せ．

(2) $\hat{\mu}$ および $\hat{v}$ の期待値を求めよ．

(3) $n = 3$ として，ある実数 a, b, c に対して以下のように表される直交行列 A および確率変数 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^\top$ を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & b & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

(i) a, b, c の値を求めよ．

(ii) $\sum_{i=1}^{3} X_i$ および $\sum_{i=1}^{3} X_i^2$ をそれぞれ Y_1, Y_2, Y_3 を用いて表せ．

(iii) $\hat{v}$ と $\hat{\mu}$ は互いに独立であることを示せ．ただし，以下の事実を用いてもよい．

- $\boldsymbol{Y}$ は期待値ベクトル $\mu_{\boldsymbol{Y}} = A(\mu, \mu, \mu)^\top$，共分散行列 $V_{\boldsymbol{Y}} = vAA^\top$ をもつ 3 変量正規分布に従う．
- $\boldsymbol{Y}$ の確率密度関数は $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$g(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det V_{\boldsymbol{Y}}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{Y}})^\top V_{\boldsymbol{Y}}^{-1} (\boldsymbol{y} - \mu_{\boldsymbol{Y}})\right)$$

で与えられる．ただし $\det V_{\boldsymbol{Y}}$ は $V_{\boldsymbol{Y}}$ の行列式である．

Problem 2

The probability density function of the normal distribution with mean $\mu \in \mathbb{R}$ and variance $v > 0$ is given by

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2v}\right).$$

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be random variables that independently follow this distribution, where n is an integer no less than 2. Consider the estimation of (μ, v) based on loss function $L(\mu, v)$ given by

$$L(\mu, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(X_i - \mu)^2}{v} + \log v\right) + \frac{\lambda}{v},$$

where log is the natural logarithm and the regularization parameter λ is a positive real number. Let $(\hat{\mu}, \hat{v})$ be the value minimizing the loss function $L(\mu, v)$. Answer the following questions.

(1) Express $(\hat{\mu}, \hat{v})$ using n, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, and λ.

(2) Obtain the expectations of $\hat{\mu}$ and $\hat{v}$.

(3) Let $n = 3$ and consider an orthogonal matrix A and a random variable $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^\top$ that are expressed as

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & a \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & b & c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

for some real numbers a, b and c.

(i) Obtain the values of a, b and c.

(ii) Express $\sum_{i=1}^{3} X_i$ and $\sum_{i=1}^{3} X_i^2$ using Y_1, Y_2 and Y_3.

(iii) Show that $\hat{v}$ and $\hat{\mu}$ are independent to each other. You may use the following facts.

- $\boldsymbol{Y}$ follows a trivariate normal distribution with mean vector $\mu_{\boldsymbol{Y}} = A(\mu, \mu, \mu)^\top$ and covariance matrix $V_{\boldsymbol{Y}} = vAA^\top$.
- The probability density function of $\boldsymbol{Y}$ for $y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ is given by

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 \det V_{\boldsymbol{Y}}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - \mu_{\boldsymbol{Y}})^\top V_{\boldsymbol{Y}}^{-1}(y - \mu_{\boldsymbol{Y}})\right),$$

where $\det V_{\boldsymbol{Y}}$ is the determinant of $V_{\boldsymbol{Y}}$.

問題 3

x を非負実数，f を自然数（非負整数）から自然数への帰納関数（計算可能関数）とする．f が全域的かつ任意の自然数 n に対して $|x - f(n)/2^n| < 1/2^n$ が成り立つとき，$f \downarrow x$ と書く．$f \downarrow x$ を満たす帰納関数 f が存在するとき，非負実数 x は計算可能であるという．以下の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ が計算可能であることを示せ．

(2) 計算可能でない非負実数が存在することを示せ．

(3) $f \downarrow x$ を満たす帰納関数 f が存在すれば，$g \downarrow x^2$ を満たす帰納関数 g が存在することを示せ．

(4) φ を一引数の関数パラメータとして，関数 h が φ-帰納関数であるとは，定数 0 と 1，足し算 (+)，射影関数（$p^{\alpha}_{\beta}(n_1, \ldots, n_{\alpha}) = n_{\beta}$，$\alpha$ と β は自然数で $1 \leq \beta \leq \alpha$）に加えて，φ を基本関数として，関数合成と最小化と原始帰納法を用いて h が定義できることをいう．h の定義の中の φ を一引数の帰納関数 f で置き換えて得られる帰納関数を h_f と書く．非負実数から非負実数への関数 H を以下のように定義する．

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

次の条件を満たす φ-帰納関数 h は存在しないことを示せ．

任意の f と x に対して $f \downarrow x$ ならば $h_f \downarrow H(x)$.

Problem 3

Let x be a non-negative real number, and let f be a recursive function (i.e., computable function) from natural numbers (i.e., non-negative integers) to natural numbers. The expression $f \downarrow x$ means that f is total and $|x - f(n)/2^n| < 1/2^n$ holds for any natural number n. A non-negative real number x is called computable if there exists a recursive function f that satisfies $f \downarrow x$. Answer the following questions.

(1) Show that $\sqrt{2}$ is computable.

(2) Show that there exists a non-negative real number that is not computable.

(3) Show that if there exists a recursive function f that satisfies $f \downarrow x$, then there exists a recursive function g that satisfies $g \downarrow x^2$.

(4) For a unary function parameter φ, a function h is called a φ-recursive function if h can be defined by function composition, minimization and primitive recursion with φ as a basic function in addition to constants 0 and 1, addition (+) and projection functions ($p^{\alpha}_{\beta}(n_1, \ldots, n_\alpha) = n_\beta$, α and β are natural numbers and $1 \leq \beta \leq \alpha$). The expression h_f denotes the recursive function obtained by replacing φ with a unary recursive function f in the definition of h. The function H from non-negative real numbers to non-negative real numbers is defined as follows.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

Show that there exists no φ-recursive function h that satisfies the following condition.

For any f and x, $f \downarrow x$ implies $h_f \downarrow H(x)$.

問題 4

下記に示す4つのステージで各命令を処理するマイクロプロセッサを考える.

Fetch	メモリから命令をフェッチする.
Decode	命令を解読し,指定のレジスタを読む.
Execute	ALU 操作あるいはメモリ操作を行う.
Write	結果を指定のレジスタに書き込む.

以下の問いに答えよ.なお,問い(1),(2)においては,各ステージに要する処理時間は5×10^{-10}秒とする.

(1) このマイクロプロセッサ上での1命令あたりの処理時間を求めよ.また,このマイクロプロセッサのスループット(1秒あたりの実行命令数)を求めよ.ただし,各命令は必ず4つのステージを必要とし,それら4つのステージが完了した後に次の命令がフェッチされるものとする.

(2) マイクロプロセッサのスループットを増加させるためにパイプライニング手法が使われる.パイプライニング手法によって上記の4つのステージがどのように実行されるか説明せよ.また,パイプライニング手法が理想的に機能する場合,このマイクロプロセッサのスループットを求めよ.

(3) パイプラインハザードが発生する場合,パイプライニング手法は理想的に機能しない可能性がある.以下の3種類のパイプラインハザードを説明せよ.

- 構造ハザード
- データハザード
- 制御ハザード

(4) パイプラインハザードをある程度回避するためにループアンローリング手法が使われる.ループアンローリング手法とは何か,およびそれがどのようにパイプラインハザードを回避するのか説明せよ.

Problem 4

Consider a microprocessor that processes each instruction in the following four stages.

Fetch	Fetch an instruction from memory.
Decode	Decode the instruction and read the specified registers.
Execute	Perform ALU or memory operations.
Write	Write the result to the specified register.

Answer the following questions. Assume that the processing time required for each stage is 5×10^{-10} seconds in questions (1) and (2).

(1) Obtain the execution time per instruction on this microprocessor. Also, obtain the throughput of this microprocessor (the number of instructions processed per second). Assume that each instruction always requires the four stages, and the next instruction is fetched only after the four stages are completed.

(2) The pipelining method is used to increase the throughput of a microprocessor. Explain how the above four stages are executed by the pipelining method. Also, obtain the throughput of this microprocessor under the assumption that the pipelining method works ideally.

(3) If pipeline hazards occur, the pipelining method may not work ideally. Explain the following three types of pipeline hazards.

- Structural hazard
- Data hazard
- Control hazard

(4) The loop unrolling method is used to avoid pipeline hazards to some extent. Explain what is the loop unrolling method, and how it avoids pipeline hazards.

問題 5

A を n 次正定値実対称行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 対角要素がすべて正の n 次実下三角行列 L は,

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\ell}_1 & L^{(1)} \end{pmatrix},$$

ただし，λ_1，$\boldsymbol{\ell}_1$，および $L^{(1)}$ はそれぞれ，正の実数，$n-1$ 次実ベクトル，および対角要素がすべて正の $n-1$ 次実下三角行列である，とブロック表示できる．この表現を用いて A のコレスキー分解 $A = LL^\top$ を，$n-1$ 次実対称行列のコレスキー分解に帰着せよ．ここで，λ_1 を正の実数として良いことを示さなくても良い．同様に，帰着した $n-1$ 次実対称行列が正定値であることを示さなくても良い．

(2) コレスキー分解を用いて A を係数行列とする連立一次方程式の直接解法を構成せよ．

(3) A の $(1,1)$ 成分（第 1 行第 1 列成分）が正の実数であることを示せ．

(4) 問い (1) の結果を用いて，A のコレスキー分解に必要な四則演算 $(+,-,\times,/)$ の総数を $c \times n^p$（ただし c と p は定数）の形で求めよ．なお，この形は求めた演算数に $n \to \infty$ で相対的に無視できる誤差が含まれていても良いことを示している．また平方根の計算に必要な四則演算数は定数であると仮定せよ．

Problem 5

Suppose that A is an n dimensional positive-definite real symmetric matrix. Answer the following questions.

(1) An n dimensional real lower triangular matrix L whose diagonal entries are all positive can be expressed in a block form,

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\ell}_1 & L^{(1)} \end{pmatrix},$$

where λ_1, $\boldsymbol{\ell}_1$, and $L^{(1)}$ are a positive real number, an $n-1$ dimensional real vector, and an $n-1$ dimensional real lower triangular matrix whose diagonal entries are all positive, respectively. Using this expression, reduce the Cholesky decomposition of A, $A = LL^\top$, to the Cholesky decomposition of an $n-1$ dimensional real symmetric matrix. Here, you need not show that we may assume λ_1 to be a positive real number. You need not show that the obtained $n-1$ dimensional real symmetric matrix is positive definite, either.

(2) Using the Cholesky decomposition, construct a direct method to solve a system of linear equations whose coefficient matrix is A.

(3) Prove that the $(1,1)$-entry (the entry in the first row and first column) of A is a positive real number.

(4) Using the result of question (1), answer the total number of the four arithmetic operations $(+, -, \times, /)$ required for the Cholesky decomposition of A in the form of $c \times n^p$, where c and p are constants. Note that this form means that the obtained number of operations may include an error which becomes relatively negligible when $n \to \infty$. In addition, suppose that the number of the four arithmetic operations required to compute a square root is a constant.

問題 6

以下の判定問題 A, B, C を考える．

A: c を定数としたとき，ソートされた n 個の相異なる整数からなる配列 $S = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ ($s_1 < s_2 < \ldots < s_n$) に対し，$s_i + s_j = c$ となるような整数 i, j ($1 \le i < j \le n$) が存在するかどうかを判定する問題．

B: n 個の相異なる整数からなる集合 $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ に対し，$t_i + t_j + t_k = 0$ となるような整数 i, j, k ($1 \le i < j < k \le n$) が存在するかどうかを判定する問題．

C: 直交座標系で表現された，2 次元ユークリッド平面上の相異なる n 個の点からなる点集合 $P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ に対し，3 点 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k) \in P$ が同一直線上に存在するような整数 i, j, k ($1 \le i < j < k \le n$) が存在するかどうかを判定する問題．

以下の問いに答えよ．

(1) 判定問題 A を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムを示せ．

(2) 判定問題 B を $O(n^2)$ 時間で解くアルゴリズムを示せ．

(3) 相異なる実数 a, b, c に対し，直交座標系で表現された 2 次元ユークリッド平面上の 3 点 (a, a^3), (b, b^3), (c, c^3) が 1 直線上にあるものとする．このとき，c を a と b を用いて表せ．

(4) 判定問題 B を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムが存在しないと仮定したとき，判定問題 C を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムも存在しないことを示せ．

Problem 6

Consider the following decision problems **A**, **B** and **C**.

A: A problem to determine whether there exist integers i, j ($1 \leq i < j \leq n$) such that $s_i + s_j = c$, for a given sorted array of n different integers $S = [s_1, s_2, \ldots, s_n]$ ($s_1 < s_2 < \ldots < s_n$) and a fixed constant c.

B: A problem to determine whether there exist integers i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) such that $t_i + t_j + t_k = 0$, for a given set of n different integers $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$.

C: A problem to determine whether there exist integers i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) such that three points $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k) \in P$ are on the same line, for a given set of n different points $P = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ represented by an orthogonal coordinate system, on the 2-dimensional Euclidean plane.

Answer the following questions.

(1) Show an algorithm that solves decision problem **A** in $O(n)$ time.

(2) Show an algorithm that solves decision problem **B** in $O(n^2)$ time.

(3) Suppose that three points (a, a^3), (b, b^3), (c, c^3) represented by an orthogonal coordinate system, on the 2-dimensional Euclidean plane, are on the same line, where a, b and c are different real numbers. Express c using a and b.

(4) Prove that there exists no algorithm that solves decision problem **C** in $O(n)$ time, under the assumption that there exists no algorithm that solves decision problem **B** in $O(n)$ time.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.