（試験時に一部訂正がありました）

平成31年度

大学院入学試験問題

数　　学

試験時間　　10:00～12:30

注意事項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第1問から第3問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用紙)

第１問

複素正方行列 X は，$XX^* = I$ を満たすとき，ユニタリ行列であるという．ただし，X^* は行列 X の共役転置行列（もしくは，随伴行列とも呼ばれる）を表し，I は単位行列とする．i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) n を正の整数とし，A, B を n 次ユニタリ行列とする．行列 AB もユニタリ行列であることを示せ．

(2) n を正の整数とし，C, D を n 次実正方行列とする．行列 F を $F = C + \mathrm{i}D$ と定義し，行列 G を

$$G = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$$

と定義する．行列 F がユニタリ行列であることと行列 G が直交行列であることは同値であることを示せ．

(3) 次の行列の固有値を求めよ．

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(4) n を正の整数とし，n 次正方行列 Q の (j, k) 成分 q_{jk} を

$$q_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}(j-1)(k-1)}{n}\right)$$

とする．行列 Q はユニタリ行列であることを示せ．

(5) 行列式が 1 である 2 次のユニタリ行列は次の一形式を持つことを示せ．

$$H = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\psi)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi)\sin\theta \\ -\exp(-\mathrm{i}\psi)\sin\theta & \exp(-\mathrm{i}\psi)\cos\theta \end{pmatrix}$$

ただし，θ と ψ は実数であるとする．

(6) 2 次のユニタリ行列の一般形を求めよ．

第 2 問

実数値関数 $u(x,t)$ が $-\infty < x < \infty$，$t \geq 0$ で定義されている．ここで，x と t は独立である．偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

の解を初期条件

$$u(x,0) = \exp(-ax^2) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{2.3}$$

の下で求める．ただし，a, c は正の実数とする．また，i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を複素積分を用いて計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a(x+\mathrm{i}d)^2\right) \mathrm{d}x$$

ただし，d は実数である．また，以下の式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

(2) $u(x,t)$ の x に関するフーリエ変換 $U(k,t)$ を

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x$$

と定義する．ここで，x に関する積分と t に関する微分の順序の交換が可能であると仮定してよい．さらに，$u(x,t)$ と $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ は任意の t に対して $x \to \pm\infty$ のとき 0 に収束するものとする．

(i) $u(x,t)$ が式 (2.1) を満たすとき，$U(k,t)$ が従う偏微分方程式を求めよ．

(ii) (i) の解は式 (2.3) の初期条件のもとで，k を変数とする関数 $F(k)$ を用いて以下のように表せることを示せ．

$$U(k,t) = F(k)\cos(kct)$$

(iii) さらに，式 (2.2)の初期条件のもとで $F(k)$ を求め，$U(k,t)$ を与えよ．設問 (1) の結果を用いてもよい．

(3) 設問 (2) で得られた $U(k,t)$ のフーリエ逆変換を計算することにより，$u(x,t)$ を求めよ．ただし，フーリエ逆変換は次式で定義される．

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t) \exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k$$

第3問

下図のように，平面上に三角形 ABC が与えられており，各頂点の座標は A $(1,0)$, B $(0,1)$, C $(-1,-1)$ とする．原点 $(0,0)$ を端点とする半直線 ℓ をランダムに選ぶ．すなわち，Θ を区間 $[0,2\pi)$ 上の一様分布に従う確率変数として

$$\ell=\{(r\cos\Theta, r\sin\Theta)\mid r\geq 0\}$$

とおく．この半直線 ℓ と三角形 ABC の周との交点を Q とおく．また，Q の座標を (X,Y) とおく．ただし，X,Y は確率変数である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q が辺 AB 上にある確率を求めよ．

(2) 点 Q が辺 AB 上にあるという条件のもとでの X の期待値は $1/2$ であることを示せ．ただし，三角形 ABC が直線 $y=x$ に関して対称であることを利用してよい．

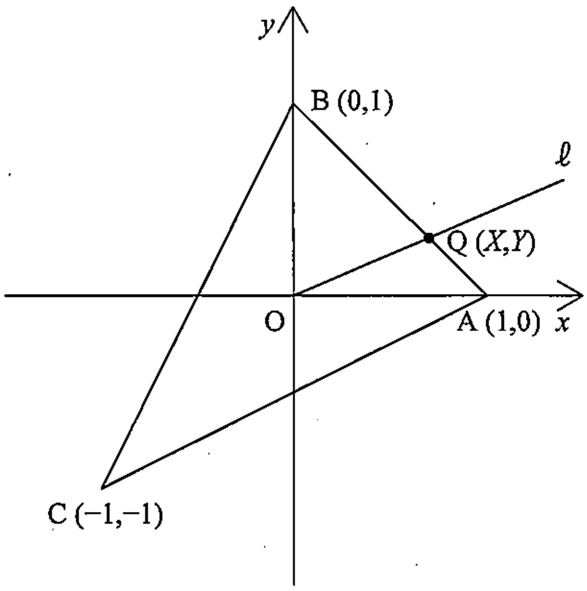
(3) 点 Q が辺 BC 上にあるという条件のもとでの X の確率密度関数を，変数変換の公式

$$f(x)=g\left(h(x)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)\right|$$

を使って求めよ．ただし，x は任意の実数とし，f と g はそれぞれ X と Θ の確率密度関数を表し，h は $\Theta=h(X)$ を満たす関数とする．

(4) 点 Q が辺 BC 上にあるという条件のもとでの X の期待値を α とおく．設問 (3) の結果を使って α を求めよ．

(5) X の期待値 μ を求めよ．



(草稿用紙)

(草稿用紙)