平 成 30 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00〜12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第1問から第3問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用紙)

第1問

次の連立一次方程式を解く問題を考える.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ここで, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^m$ は与えられた定数の行列とベクトルであり, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ は未知ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ のように, 行列 $\boldsymbol{A}$ の最後の列の後ろに1列追加した $m\times(n+1)$ 行列を作る. 例えば, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の場合には, $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる. この例の $\overline{\boldsymbol{A}}$ の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする.

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(ii) $\boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることを, $\boldsymbol{a}_4 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ となるスカラー x_1, x_2 を求めることで示せ.

(iii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(2) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ に対して, $\operatorname{rank}\overline{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ のとき連立一次方程式の解が存在することを示せ.

(3) $\operatorname{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ ならば解は存在しない. $m > n$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n$ で, $\operatorname{rank}\overline{\boldsymbol{A}} > \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ のとき, 連立一次方程式の右辺と左辺の差のノルムの2乗 $\| \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(4) $m < n$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = m$ のとき, どのような $\boldsymbol{b}$ に対しても連立一次方程式を満たす解が複数存在する. 解のうちで $\| \boldsymbol{x} \|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を, 連立一次方程式を制約条件として, ラグランジュ乗数法を用いて求めよ.

(5) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}$ に対して, 以下の4つの式を満たす $\boldsymbol{P} \in \mathcal{R}^{n\times m}$ が唯一に決まることを示せ.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$$

(6) (3) で求めた $\boldsymbol{x}$ と (4) で求めた $\boldsymbol{x}$ が, いずれも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$ の形で表せることを示せ.

第2問

関数 f_1 を $[0,1]$ 上で定義される正値の定数関数とし，$f_1(x)=c$ とおく．また，正の実数 p,q を $1/p+1/q=1$ を満たすものとする．これらに対し，$[0,1]$ 上で定義される関数の列 $\{f_n\}$ を

$$f_{n+1}(x)=p\int_0^x (f_n(t))^{1/q}\,\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,\ldots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1=0,\ c_1=c$ かつ

$$a_{n+1}=q^{-1}a_n+1 \qquad (n=1,2,\ldots),$$
$$c_{n+1}=\frac{p\,(c_n)^{1/q}}{a_{n+1}} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

で定まる実数列 $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ を用いて $f_n(x)=c_nx^{a_n}$ と表されることを示せ．

(2) $n\geq 2$ に対し $[0,1]$ 上で定義される関数 g_n を $g_n(x)=x^{a_n}-x^p$ とおく．$n\geq 2$ に対し $a_n\geq 1$ となることに注意して，g_n がある点 $x=x_n$ で最大値をとることを示し，この x_n を求めよ．

(3) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ となることを示せ．

(4) $d_n=(c_n)^{q^n}$ とおく．d_{n+1}/d_n が $n\to\infty$ のとき有限な正の値に収束することを示せ．なお，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(1-1/t)^t=1/\mathrm{e}$ となることは用いて良い．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ の値を求めよ．

(6) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x^p$ となることを示せ．

第3問

赤いカードが2枚と白いカードが1枚入った袋および複素数 z_n, w_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ について考える．まず，袋から1枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出されたカードの色に応じて z_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を以下のルールで生成する．

$$z_{k+1} = \begin{cases} iz_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ -iz_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

次に，袋からもう一度1枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出したカードの色に応じて w_{k+1} を以下のルールで生成する．

$$w_{k+1} = \begin{cases} -iw_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ iw_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

ここで，各カードは独立に等確率で取り出されるものとする．また初期状態を $z_0 = 1, w_0 = 1$ とする．すなわち，z_n, w_n は，$z_0 = 1, w_0 = 1$ の状態から始め，上記の一連の二つの操作を n 回繰り返した後の値である．なお，ここで i は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき $\mathrm{Re}(z_n) = 0$，偶数のとき $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ はそれぞれ z の実部，虚部を表すものとする．

(2) $z_n = 1$ である確率を P_n，$z_n = i$ である確率を Q_n とする．P_n，Q_n についての漸化式を立てよ．

(3) $z_n = 1$，$z_n = i$，$z_n = -1$，$z_n = -i$ である確率をそれぞれ求めよ．

(4) z_n の期待値が $(i/3)^n$ であることを示せ．

(5) $z_n = w_n$ である確率を求めよ．

(6) $z_n + w_n$ の期待値を求めよ．

(7) $z_n w_n$ の期待値を求めよ．

(草稿用紙)

(草稿用紙)