平成29年度

東京大学大学院情報理工学系研究科 コンピュータ科学専攻 入学試験問題

専門科目 I

平成28年8月22日

13:45 – 15:15

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.

(2) 3題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

Specialized Subjects I

13:45 – 15:15, August 22, 2016

Entrance Examination (AY 2017)

Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Technology

The University of Tokyo

Notice:

(1) Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) Answer all of the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

有限アルファベット Σ 上の言語 $L \subseteq \Sigma^*$ が**正規**であるとは，ある有限オートマトン $\mathcal{A}$ が存在して $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ となることをいう．ただし

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ は } \mathcal{A} \text{ に受理される}\}$$

である．

以下の問いに答えよ．

(1) アルファベット Σ を $\Sigma = \{a, b\}$ と定める．次の言語 L_1 に対して，**非決定性**有限オートマトン (*nondeterministic* finite automaton, NFA) $\mathcal{A}_1$ で，$\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = L_1$ かつ状態数が 4 以下のものを一つ与えよ．

$$L_1 \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ の中に 2 回以上現れる文字 } l \in \Sigma \text{ がある}\}$$

(2) Σ を有限アルファベットとする．以下の主張を証明せよ：任意の有限言語 $L = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \Sigma^*$ は正規である．ただし n は非負整数とする．

(3) アルファベット Σ を $\Sigma = \{a, b\}$ と定める．問い (1) の言語 L_1 に対して，**決定性**有限オートマトン (*deterministic* finite automaton, DFA) $\mathcal{A}_2$ で，$\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \Sigma^* \setminus L_1$ かつ状態数が 5 以下のものを一つ与えよ．ただし $\Sigma^* \setminus L_1$ は $L_1 \subseteq \Sigma^*$ の補集合をあらわす．

(4) 次の問題の決定手続きを与え，簡潔に説明せよ．

入力 非決定性有限オートマトン $\mathcal{A}$.

出力 言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ が無限集合かどうか．

Problem 1

A language $L \subseteq \Sigma^*$ over a finite alphabet Σ is said to be *regular* if there exists a finite automaton $\mathcal{A}$ such that $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Here

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is accepted by } \mathcal{A}\} \;.$$

Answer the following questions.

(1) We fix an alphabet Σ by $\Sigma = \{a, b\}$. For the language L_1 below, present a *nondeterministic* finite automaton (NFA) $\mathcal{A}_1$ such that: $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = L_1$, and the number of states of $\mathcal{A}_1$ is not greater than 4.

$$L_1 \;=\; \{w \in \Sigma^* \mid \text{there is a character } l \in \Sigma \text{ that occurs more than once in } w\}$$

(2) Assume that Σ is a finite alphabet. Prove the following: any finite language $L = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \Sigma^*$ is regular. Here n is a nonnegative integer.

(3) We fix an alphabet Σ by $\Sigma = \{a, b\}$. For the language L_1 in Question (1), present a *deterministic* finite automaton (DFA) $\mathcal{A}_2$ such that: $\mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \Sigma^* \setminus L_1$, and the number of states of $\mathcal{A}_2$ is not greater than 5. Here $\Sigma^* \setminus L_1$ denotes the complement of $L_1 \subseteq \Sigma^*$.

(4) Give a decision procedure for the following problem, and explain it briefly.

Input nondeterministic finite automaton $\mathcal{A}$.

Output whether the language $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ is an infinite set or not.

問題 2

辺にコストが設定されている連結な無向グラフ G が与えられているものとする．このとき，すべての頂点を連結し，かつ木であるような部分グラフのうち，コストの総和が最小のものを**最小木**と呼ぶ．以下の疑似コード（アルゴリズム A）は，最小木を求める問題を解くアルゴリズムである．ただし，G に含まれる頂点の数を V，辺の数を E とする．

手順 1. 任意の頂点を一つ選んで，その頂点のみからなる G の部分木を G' とする．

手順 2. $\boxed{\text{(a)}}$ のうち，コストが最小の辺を選んで，その辺と両端の頂点を G' に加える．

手順 3. G' が G のすべての頂点を含むようになるまで，手順 2 を繰り返す．

以下の問いに答えよ．

(1) 上記 $\boxed{\text{(a)}}$ に入るべき適切な語句を答えよ．

アルゴリズム A を具体的に実現する方法はいくつか考えられる．特に，手順 2 でコストが最小の辺をどのように見つけるかによって計算時間が異なってくる．
以下の問いに答えよ．

(2) グラフ G が密（$V^2 \approx E$）であり，かつ隣接行列として与えられているものとする．この場合，アルゴリズム A の時間効率のよい実現を説明せよ．

またその場合の時間計算量とその根拠を答えよ．

(3) グラフ G が疎（$V \approx E$）であり，かつ隣接リストとして与えられているものとする．この場合，アルゴリズム A の時間効率のよい実現を説明せよ．

またその場合の時間計算量とその根拠を答えよ．

(4) アルゴリズム A によって得られるグラフ G' が G の最小木であることを示せ．

Problem 2

Suppose that we are given an undirected graph G where each edge is associated with a cost. A *minimum spanning tree* is a subgraph of the graph such that: it connects all the vertices; it is a tree; and it takes a minimum total cost. The following pseudo code (Algorithm A) shows an algorithm to compute a minimum spanning tree. We let the numbers of vertices and edges of G be denoted by V and E, respectively.

Step 1. Choose an arbitrary vertex and let G' be the subtree of G consisting of only that vertex.

Step 2. Choose an edge with a minimum cost, out of $\boxed{\quad\text{(a)}\quad}$, and add the edge and its end vertices to G'.

Step 3. Repeat Step 2 until G' contains all the vertices of G.

Answer the following question.

(1) Answer an appropriate phrase that fills $\boxed{\quad\text{(a)}\quad}$ above.

There are multiple ways to implement Algorithm A. Specifically, computation time differs depending on how to find an edge with a minimum cost in Step 2.

Answer the following questions.

(2) Suppose that G is dense ($V^2 \approx E$) and given as an adjacency matrix. Explain a time-efficient implementation of Algorithm A in this case.

Answer also the time complexity of the implementation, and explain why.

(3) Suppose that G is sparse ($V \approx E$) and given as adjacency lists. Explain a time-efficient implementation of Algorithm A in this case.

Answer also the time complexity of the implementation, and explain why.

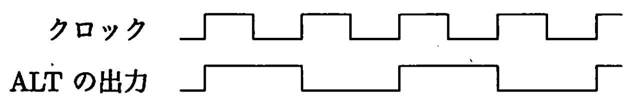
(4) Show that the graph G' obtained using Algorithm A is a minimum spanning tree of the graph G.

問題 3

順序回路に関する以下の問いに答えよ．クロックは理想的な矩形波でスキューはなく，ゲートの遅延はクロック周期に比べて十分に短いものと仮定せよ．

(1) D フリップフロップ，JK フリップフロップ，T フリップフロップのうち 1 つを選び，クロック，入力および内部状態によってその出力がどう決まるかを説明せよ．

(2) 下図のようにクロック 1 周期ごとに 0 と 1 を交互に出力する回路 ALT を設計し図示せよ．問い (1) で選んだフリップフロップと，AND, OR, NOT ゲートを用いてよい．



(3) 4 ビットの符号なし整数値 8 個をバブルソートアルゴリズムを用いてソートする回路を設計し図示せよ．入出力は以下の通りである．

(i) 入力 $I_0, I_1, \ldots, I_7$．それぞれ 4 ビットの符号なし整数．

(ii) 入力 L．1 ビット．

(iii) 出力 $O_0, O_1, \ldots, O_7$．それぞれ 4 ビットの符号なし整数．

(iv) 出力 V．1 ビット．

このソート回路の動作は以下の通りである．

(a) L が 1 のときには入力 $I_0, I_1, \ldots, I_7$ の値を 32 個のフリップフロップを用いて格納する．以下，これら格納された値を 4 ビットの整数値 8 個とみなして，$v_0, v_1, \ldots, v_7$ とする．

(b) L が 0 になった後の最初のクロック周期では，v_0 と v_1 を比較し，$v_0 > v_1$ ならば両者を交換し，それ以外ならばこれらの値を保持する．同じ演算を (v_2, v_3)，(v_4, v_5)，(v_6, v_7) の 3 組に対しても行う．新たな $v_0, v_1, \ldots, v_7$ の値を $O_0, O_1, \ldots, O_7$ に出力する．

(c) L が 0 になった後の 2 回目のクロック周期では，v_1 と v_2 と比較し，$v_1 > v_2$ ならば両者を交換し，それ以外ならばこれらの値を保持する．同じ演算を (v_3, v_4)，(v_5, v_6) の 2 組に対しても行う．新たな $v_0, v_1, \ldots, v_7$ の値を $O_0, O_1, \ldots, O_7$ に出力する．

(d) 以下，L が 0 のあいだ (b) と (c) を交互に繰り返す．(b), (c) を実行する連続する 2 クロックで値の交換が起こらなければ V を 1 にし，それ以外の場合は V を 0 にする．

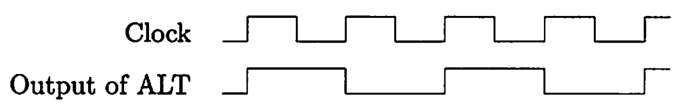
設計には以下の回路を用いてよい．問い (1) で選んだフリップフロップ，問い (2) で設計した回路 ALT，4 ビットの比較演算器 CMP，4 ビットの 2 対 1 マルチプレクサ MUX，および AND, OR, NOT ゲート．

Problem 3

Answer the following questions regarding sequential logic circuits. Assume that the clock is an ideal rectangular wave without skew, and that the gate delay is short enough compared with the clock cycle.

(1) Choose one from D flip-flop, JK flip-flop and T flip-flop, and explain how its output is determined by the clock, the inputs and the internal state.

(2) Design and depict a circuit ALT, whose output toggles between 0 and 1 every clock cycle as illustrated below. You can use the flip-flop you have chosen in Question (1), and the AND, OR and NOT gates.



(3) Design and depict a circuit that sorts 8 integers, each of which being a 4-bit unsigned integer, by the bubble sort algorithm. The inputs and the outputs of the sorting circuit are as follows:

(i) Inputs $I_0, I_1, \ldots, I_7$. Each of them is a 4-bit unsigned integer.

(ii) 1-bit input L.

(iii) Outputs $O_0, O_1, \ldots, O_7$. Each of them is a 4-bit unsigned integer.

(iv) 1-bit output V.

The sorting circuit should work as follows.

(a) When L is 1, the inputs $I_0, I_1, \ldots, I_7$ are stored using 32 flip-flops. Those stored data are regarded as eight 4-bit unsigned integers, and called $v_0, v_1, \ldots, v_7$ in the following.

(b) After L becomes 0, in the first clock cycle, the circuit compares v_0 and v_1, and if $v_0 > v_1$, then it swaps them, and otherwise it keeps them. The same operations are applied to the three pairs (v_2, v_3), (v_4, v_5) and (v_6, v_7). The new values of $v_0, v_1, \ldots, v_7$ are output to $O_0, O_1, \ldots, O_7$.

(c) In the second clock cycle after L becomes 0, the circuit compares v_1 and v_2, and if $v_1 > v_2$, then it swaps them, and otherwise it keeps them. The same operations are applied to the two pairs (v_3, v_4) and (v_5, v_6). The new values of $v_0, v_1, \ldots, v_7$ are output to $O_0, O_1, \ldots, O_7$.

(d) The circuit repeats steps (b) and (c) while L is 0. If no swap of values happens for two consecutive clock cycles that execute (b) or (c), V is set to 1, and otherwise V is set to 0.

You can use the following circuits in your design: the flip-flop you have chosen in Question (1), the ALT circuit you have designed in Question (2), 4-bit comparator CMP, 4-bit 2-to-1 multiplexer MUX, and the AND, OR and NOT gates.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

平成29年度
東京大学大学院情報理工学系研究科 コンピュータ科学専攻 入学試験問題

専門科目 II

平成28年8月22日
15:45 – 17:15

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開けないこと．

(2) 以下の6題のうち，2題を選択して答えよ．各解答用紙に1題ずつ解答せよ．解答用紙の指定欄に選択した問題番号を明記すること．

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

Specialized Subjects II

15:45 – 17:15, August 22, 2016

Entrance Examination (AY 2017)
Department of Computer Science, Graduate School of Information Science and Technology
The University of Tokyo

Notice:

(1) Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) Out of the following 6 problems, choose 2 problems and answer them. Answer one problem on each answer sheet. Indicate clearly, in the designated box on each answer sheet, which problem you are answering.

(3) Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること．
Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

以下の問いに答えよ．

(1) $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ のそれぞれを $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\sin(\beta)$ の式として表せ．

(2) $\cos(\alpha/2)$, $\sin(\alpha/2)$ のそれぞれを $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ の式として表せ．ただし $0 \leq \alpha < \pi/2$ とする．

(3) 問い (2) の式を利用して，$\cos(\alpha/2)$，$\sin(\alpha/2)$ のそれぞれを $\cos(\alpha)$，$\sin(\alpha)$ を用いて有限精度で計算することを考える．α が 0 に近い時，桁落ちの危険性があるか？ もしあれば桁落ちしないように式を改良せよ．ただし $0 \leq \alpha < \pi/2$ とする．

(4) α が $\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{N} b_i 2^{-i}$ と表現されているとする．ここで N は自然数であり，b_i $(i=1,2,\ldots,N)$ は 0 または 1 である．

  (a) $n=1,2,\ldots,N$ に対して $\alpha_n = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i 2^{-i}$ と定義する．このとき，$n=1,2,\ldots,N-1$ に対し $\cos(\alpha_n)$ と $\sin(\alpha_n)$ を用いて $\cos(\alpha_{n+1})$ と $\sin(\alpha_{n+1})$ を計算する式を与えよ．

  (b) $\cos(\alpha)$ と $\sin(\alpha)$ を四則演算（$+,-,\times,/$）と開平（$\sqrt{\ }$）のみで計算するアルゴリズムを与えよ．

(5) $\cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$ と $\sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$ と定義する．$0 \leq x < 1$ であり有限精度で 2 進表現されている数 x について，値 $\cosh(x\log_e 2)$ と $\sinh(x\log_e 2)$ を四則演算（$+,-,\times,/$）と開平（$\sqrt{\ }$）のみで計算するアルゴリズムを考案し，その概要を示せ．

Problem 1

Answer the following questions.

(1) Express each of $\cos(\alpha + \beta)$ and $\sin(\alpha + \beta)$ with $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$, and $\sin(\beta)$.

(2) Suppose $0 \leq \alpha < \pi/2$. Express each of $\cos(\alpha/2)$ and $\sin(\alpha/2)$ with $\cos(\alpha)$ and $\sin(\alpha)$.

(3) Suppose $0 \leq \alpha < \pi/2$. Consider computing each of $\cos(\alpha/2)$ and $\sin(\alpha/2)$ using $\cos(\alpha)$ and $\sin(\alpha)$ with finite precision, by the expressions obtained in Question (2). Is there a risk of losing significant digits when α is close to zero? If there is, improve the expressions to avoid this loss.

(4) Suppose that α is expressed as $\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{N} b_i 2^{-i}$, where N is a natural number and b_i ($i = 1, 2, \ldots, N$) is either 0 or 1.

  (a) For $n = 1, 2, \ldots, N$, we define $\alpha_n = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i 2^{-i}$. Give expressions to compute $\cos(\alpha_{n+1})$ and $\sin(\alpha_{n+1})$ using $\cos(\alpha_n)$ and $\sin(\alpha_n)$, for $n = 1, 2, \ldots, N-1$.

  (b) Give an algorithm to compute $\cos(\alpha)$ and $\sin(\alpha)$ using only the four arithmetic operations $(+, -, \times, /)$ and the extraction of square root $(\sqrt{\ })$.

(5) We define $\cosh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$ and $\sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$. Suppose that $0 \leq x < 1$ and x is expressed in a binary representation with finite precision. Design an algorithm to compute $\cosh(x \log_e 2)$ and $\sinh(x \log_e 2)$ using only the four arithmetic operations $(+, -, \times, /)$ and the extraction of square root $(\sqrt{\ })$, and describe an outline of the algorithm.

問題 2

集合 S 上の 2 項関係 $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ が**ダイヤモンド性**を満たすとは，以下の条件が成り立つことをいう．

$$\forall x, y, z \in S.\ (x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \wedge y \neq z \Rightarrow \exists w \in S.\ (y\mathcal{R}w \wedge z\mathcal{R}w)).$$

集合 S 上の 2 項関係 $\mathcal{R}$ の反射推移閉包 $\mathcal{R}^*$（すなわち，$\mathcal{R}^*$ は，(i) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$, (ii) $\forall x \in S.\ (x\mathcal{R}^*x)$, (iii) $\forall x, y, z \in S.\ (x\mathcal{R}^*y \wedge y\mathcal{R}^*z \Rightarrow x\mathcal{R}^*z)$ を満たす最小の 2 項関係）がダイヤモンド性を満たすとき，$\mathcal{R}$ は**合流性**を満たすという．また，以下の条件が成り立つとき，集合 S 上の 2 項関係 $\mathcal{R}$ は**弱合流性**を満たすという．

$$\forall x, y, z \in S.\ (x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \Rightarrow \exists w \in S.\ (y\mathcal{R}^*w \wedge z\mathcal{R}^*w)).$$

例えば，$\mathcal{R}_1 = \{(a,b),(a,c),(b,d),(c,e),(d,e)\}$ は合流性と弱合流性は満たすが，ダイヤモンド性は満たさない．以下の問いに答えよ．

(1) 集合 $\{a,b,c,d\}$ 上の 2 項関係で，弱合流性を満たすが合流性を満たさないものの例を挙げよ．

(2) すべての集合 S および S 上のすべての 2 項関係 $\mathcal{R}$ について，$\mathcal{R}$ がダイヤモンド性を満たすならば，$\mathcal{R}$ は合流性も満たすことを証明せよ．

(3) すべての集合 S および S 上のすべての 2 項関係 $\mathcal{R}$ について，$\mathcal{R}$ が弱合流性を満たし，かつ無限列 $x_0\mathcal{R}x_1\mathcal{R}x_2\mathcal{R}\cdots$ を持たないのであれば，$\mathcal{R}$ は合流性を満たすことを証明せよ．

(4) 集合 $\{a,b,c\}$ 上のすべての 2 項関係 $\mathcal{R}$ について，$\mathcal{R}$ が弱合流性を満たすならば，$\mathcal{R}$ は合流性も満たすことを証明せよ．

Problem 2

We say that a binary relation $\mathcal{R} \subseteq S \times S$ on a set S satisfies the *diamond property* if the following condition holds:

$$\forall x, y, z \in S.\ (x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \wedge y \neq z \Rightarrow \exists w \in S.\ (y\mathcal{R}w \wedge z\mathcal{R}w)).$$

A binary relation $\mathcal{R}$ on S is said to satisfy *confluence* if the reflexive and transitive closure $\mathcal{R}^*$ of the binary relation $\mathcal{R}$ (i.e., $\mathcal{R}^*$ is the least relation such that (i) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$, (ii) $\forall x \in S.\ (x\mathcal{R}^*x)$, (iii) $\forall x, y, z \in S.\ (x\mathcal{R}^*y \wedge y\mathcal{R}^*z \Rightarrow x\mathcal{R}^*z)$) satisfies the diamond property.

A binary relation $\mathcal{R}$ on S is said to satisfy *weak confluence* if the following condition holds:

$$\forall x, y, z \in S.\ (x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \Rightarrow \exists w \in S.\ (y\mathcal{R}^*w \wedge z\mathcal{R}^*w)).$$

For example, $\mathcal{R}_1 = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (d, e)\}$ satisfies confluence and weak confluence, but does not satisfy the diamond property. Answer the following questions.

(1) Give an example of a binary relation on the set $\{a, b, c, d\}$ that satisfies weak confluence but not confluence.

(2) Prove that, for every set S and every binary relation $\mathcal{R}$ on S, if $\mathcal{R}$ satisfies the diamond property, then $\mathcal{R}$ also satisfies confluence.

(3) Prove that, for every set S and every binary relation $\mathcal{R}$ on S, if $\mathcal{R}$ satisfies weak confluence and also if there is no infinite sequence $x_0\mathcal{R}x_1\mathcal{R}x_2\mathcal{R}\cdots$, then $\mathcal{R}$ satisfies confluence.

(4) Prove that, for every binary relation $\mathcal{R}$ on the set $\{a, b, c\}$, if $\mathcal{R}$ satisfies weak confluence, $\mathcal{R}$ also satisfies confluence.

問題 3

相異なる数字からなる数列 $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ について，数列 $a_{c_1}, a_{c_2}, \ldots, a_{c_k}$ （ただし $1 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_k \leq n$）を A の**部分列**とよぶ．部分列 $a_{c_1}, a_{c_2}, \ldots, a_{c_k}$ が $i < j$ なるすべての i, j に対し $a_{c_i} < a_{c_j}$ を満たすならば，これを A の**増加部分列**とよぶ．同様に，$i < j$ なるすべての i, j に対し $a_{c_i} > a_{c_j}$ を満たすならば，これを A の**減少部分列**とよぶ．
以下の問いに答えよ．

(1) 数列

$$A_0 : 5, 2, 3, 9, 6, 8$$

について，その増加部分列のうち最長のものを求めよ．

n 個の相異なる数字からなる数列 $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ および $1 \leq i \leq n$ なる整数 i について，数列 A の増加部分列であって末尾が a_i であるものの集合 S_i を考え，S_i の最長の元の長さを ℓ_i とおく．たとえば問い (1) の数列 A_0 に対しては $S_4 = \{(9), (5, 9), (2, 9), (3, 9), (2, 3, 9)\}$ および $\ell_4 = 3$ となる．
以下の問いに答えよ．

(2) 問い (1) の数列 A_0 に対して，ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 および ℓ_5, ℓ_6 を求めよ．

(3) n 個の相異なる数字からなる数列 $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ について，A の最長の増加部分列の長さを ℓ とおく．上で定義した ℓ_i に対して，$\ell_i = m$ となる i の個数を d_m とする．このとき，$d_m \geq n/\ell$ となるような m が存在することを示せ．

(4) 問い (3) の状況において，A の最長の減少部分列の長さは n/ℓ 以上である．このことを示せ．

(5) 長さ n の相異なる数字からなる任意の数列は，$\sqrt{n}$ 以上の長さの増加部分列または $\sqrt{n}$ 以上の長さの減少部分列をもつことを示せ．

Problem 3

Given a sequence $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ of pairwise distinct numbers, a sequence $a_{c_1}, a_{c_2}, \ldots, a_{c_k}$ with $1 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_k \leq n$ is called a *subsequence* of A. A subsequence $a_{c_1}, a_{c_2}, \ldots, a_{c_k}$ is called an *increasing subsequence* if $a_{c_i} < a_{c_j}$ holds for all i, j such that $i < j$. Similarly, it is called a *decreasing subsequence* if $a_{c_i} > a_{c_j}$ holds for all i, j such that $i < j$.

Answer the following question.

(1) For the sequence

$$A_0 : 5, 2, 3, 9, 6, 8$$

show its longest increasing subsequence.

Given a sequence $A : a_1, a_2, \ldots, a_n$ of pairwise distinct numbers and an integer i such that $1 \leq i \leq n$, consider the set S_i of increasing subsequences of A whose last element is a_i, and let ℓ_i denote the length of a longest element of S_i. For example, for the sequence A_0 in Question (1) we have $S_4 = \{(9), (5, 9), (2, 9), (3, 9), (2, 3, 9)\}$ and $\ell_4 = 3$.

Answer the following questions.

(2) For the sequence A_0 in Question (1), compute ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 and ℓ_5, ℓ_6.

(3) Given a sequence $A: a_1, a_2, \ldots, a_n$ of pairwise distinct numbers, let ℓ denote the length of a longest increasing subsequence. Using ℓ_i that is defined above, we let d_m denote the number of i's such that $\ell_i = m$. Show that there exists m such that $d_m \geq n/\ell$.

(4) In the setting of Question (3), the length of a longest decreasing subsequence of A is not smaller than n/ℓ. Show this fact.

(5) Every sequence of pairwise distinct numbers of length n has, either: an increasing subsequence of length not smaller than $\sqrt{n}$; or a decreasing subsequence of length not smaller than $\sqrt{n}$. Show this fact.

問題 4

表1に示す5つのプロセスのスケジューリング問題を考える．同時に実行可能なプロセスは1つのみで，プロセスのコンテキストスイッチにかかる時間は無視できるものとする．また，各プロセスの処理時間も事前にわかっているものとする．この問題で用いる用語の説明を表2に示す．

表 1: 5つのプロセスの到着時刻と処理時間

プロセス	A	B	C	D	E
最初の到着時刻	0ミリ秒	30ミリ秒	40ミリ秒	40ミリ秒	80ミリ秒
処理時間	90ミリ秒	10ミリ秒	50ミリ秒	30ミリ秒	20ミリ秒

表 2: この問題で用いる用語の説明

ターンアラウンド時間	プロセスの到着から実行完了までの時間（待ち時間を含む）
待ち時間	プロセスが実行可能キューで待つ合計の時間
応答時間	プロセスの到着から実行開始までの時間

以下の問いに答えよ．

(1) First Come First Serve 方針に従ってスケジューリングする場合の平均ターンアラウンド時間，平均待ち時間，平均応答時間を求めよ．

(2) ノンプリエンプティブな Shortest Job First 方針に従ってスケジューリングする場合の平均ターンアラウンド時間，平均待ち時間，平均応答時間を求めよ．

(3) プリエンプティブな Shortest Job First 方針に従ってスケジューリングする場合の平均ターンアラウンド時間，平均待ち時間，平均応答時間を求めよ．

(4) タイムスライスが20ミリ秒である Round Robin 方針に従ってスケジューリングする場合の平均ターンアラウンド時間，平均待ち時間，平均応答時間を求めよ．なお，タイムスライスの切り替えはA，B，C，D，Eの順番とし，現在のプロセスがタイムスライスを使い切らなかった場合は即座に次のプロセスのタイムスライスが開始されるものとする．

(5) 表1の5つのプロセスが周期的に到着する場合を考える．各プロセスの最初の到着時刻は表1の到着時刻とし，その後表3に示す到着間隔で繰り返し到着するものとする．このとき，プリエンプティブな Rate Monotonic 方針に従ってスケジューリングするとデッドラインミスが起こる．最初のデッドラインミスが起こる時刻とそのプロセス名を求めよ．

ここで，Rate Monotonic 方針とは周期の短いプロセスを高優先度にするスケジューリング方針である．周期が同じプロセスの場合には，先に到着したプロセスのほうが高優先度になるものとする．また，デッドラインミスとは周期プロセスの実行が次の到着時刻までに完了できない事象をさす．

表 3: 5つのプロセスの到着間隔（周期）

プロセス	A	B	C	D	E
到着間隔（周期）	200ミリ秒	100ミリ秒	400ミリ秒	100ミリ秒	100ミリ秒

Problem 4

Consider the problem of scheduling the five processes shown in Table 1. Assume that only one process is allowed to be executed at any instant, and the overhead of process context switches can be ignored. The execution time of each process is also known a priori. Table 2 summarizes the technical terms used in this problem.

Table 1: Arrival time and execution time of the five processes

Process	A	B	C	D	E
Arrival time	0 ms	30 ms	40 ms	40 ms	80 ms
Execution time	90 ms	10 ms	50 ms	30 ms	20 ms

Table 2: Technical terms used in this problem

Turnaround time	Time interval from the arrival of the process to the completion of its execution (including the waiting time)
Waiting time	Total amount of time for which the process is waiting in the ready queue
Response time	Time interval from the arrival of the process to the beginning of its execution

Answer the following questions.

(1) Answer the average turnaround time, average waiting time, and average response time when the processes are scheduled according to the First Come First Serve policy.

(2) Answer the average turnaround time, average waiting time, and average response time when the processes are scheduled according to the non-preemptive Shortest Job First policy.

(3) Answer the average turnaround time, average waiting time, and average response time when the processes are scheduled according to the preemptive Shortest Job First policy.

(4) Answer the average turnaround time, average waiting time, and average response time when the processes are scheduled according to the Round Robin policy where the time slice is 20 ms. Note that time slices are switched in the order of A, B, C, D, E, and that the next time slice starts immediately when the current process does not exhaust its time slice.

(5) Consider the scenario that the five processes shown in Table 1 arrive periodically. The arrival time of the first instance of each process is the arrival time shown in Table 1, and its following instances arrive repeatedly at the constant interval shown in Table 3. If these five processes are scheduled according to the preemptive Rate Monotonic policy, deadline misses occur. Answer when (at what time) the first deadline miss occurs, and to which process it occurs.

Here the Rate Monotonic policy is a scheduling policy that assigns higher priorities to processes with shorter periods; in case the periods are the same, higher priorities are given to processes that arrive earlier. A deadline miss is an event that a periodic process fails to complete its execution before the arrival of its next instance.

Table 3: Inter-arrival time (period) of the five processes

Process	A	B	C	D	E
Inter-arrival time (period)	200 ms	100 ms	400 ms	100 ms	100 ms

問題 5

平均 μ，分散 σ_0^2 の一次元正規分布の確率密度関数

$$\mathcal{N}(x \mid \mu, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu)^2\right)$$

を考える．また，n 個の実数値観測データを考え，これを $\boldsymbol{x}_{1:n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と書く．さらに以下を仮定する．

- 各観測データ x_i （ただし $i = 1, 2, \ldots, n$）はそれぞれ独立に平均 μ，分散 σ_0^2 の一次元正規分布に従う．
- 分散 σ_0^2 は既知である．
- 平均 μ の事前分布は，平均 m_0，分散 ρ_0^2 の一次元正規分布である．

以下の問いに答えよ．

(1) データ x_1 を観測したとき，確率変数 μ のベイズ事後分布の確率密度関数を $p(\mu \mid x_1, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2)$ とする．この分布は一次元正規分布となり，その確率密度関数は $\mathcal{N}(\mu \mid m_1, \rho_1^2)$ となる．平均 m_1 と分散 ρ_1^2 を，$x_1, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2$ を用いて表せ．
次の等式を用いてよい．

$$p(\mu \mid x_1, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2) = \frac{\mathcal{N}(x_1 \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_0, \rho_0^2)}{\int \mathcal{N}(x_1 \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_0, \rho_0^2)\mathrm{d}\mu}$$

(2) $n \geq 2$ とする．データ $\boldsymbol{x}_{1:n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を観測したとき，確率変数 μ のベイズ事後分布の確率密度関数を $p(\mu \mid \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2)$ とする．この分布は一次元正規分布となり，その確率密度関数は $\mathcal{N}(\mu \mid m_n, \rho_n^2)$ となる．平均 m_n と分散 ρ_n^2 を，$n, \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2$ を用いて表せ．

(3) 問い (2) のベイズ事後分布 $p(\mu \mid \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2)$ に対して次式が成り立つことを示せ．

$$p(\mu \mid \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2) = \frac{\mathcal{N}(x_n \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_{n-1}, \rho_{n-1}^2)}{\int \mathcal{N}(x_n \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_{n-1}, \rho_{n-1}^2)\mathrm{d}\mu}$$

Problem 5

Consider the probability density function of the one-dimensional normal distribution with mean μ and variance σ_0^2:

$$\mathcal{N}(x \mid \mu, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu)^2\right) .$$

Let us also consider n real-valued observations; they are denoted by $\boldsymbol{x}_{1:n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. We further suppose the following.

- Each observation x_i (where $i = 1, 2, \ldots, n$) is independently distributed, following the one-dimensional normal distribution with mean μ and variance σ_0^2.
- Variance σ_0^2 is known.
- The prior distribution of μ is the one-dimensional normal distribution with mean m_0 and variance ρ_0^2..

Answer the following questions.

(1) Given an observation x_1, let $p(\mu \mid x_1, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2)$ denote the probability density function of the Bayes posterior distribution of the random variable μ. This distribution is a one-dimensional normal distribution, and its probability density function is given by $\mathcal{N}(\mu \mid m_1, \rho_1^2)$. Express mean m_1 and variance ρ_1^2, using x_1, σ_0^2, m_0 and ρ_0^2.

You can use the following equality:

$$p(\mu \mid x_1, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2) = \frac{\mathcal{N}(x_1 \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_0, \rho_0^2)}{\int \mathcal{N}(x_1 \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_0, \rho_0^2)\mathrm{d}\mu} .$$

(2) Let $n \geq 2$. Given observations $\boldsymbol{x}_{1:n} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, let $p(\mu \mid \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2)$ denote the probability density function of the Bayes posterior distribution of the random variable μ. This distribution is a one-dimensional normal distribution, and its the probability density function is given by $\mathcal{N}(\mu \mid m_n, \rho_n^2)$. Express mean m_n and variance ρ_n^2, using $n, \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0$ and ρ_0^2.

(3) For the Bayes posterior distribution $p(\mu \mid \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2)$ of Question (2), show that the following equality holds:

$$p(\mu \mid \boldsymbol{x}_{1:n}, \sigma_0^2, m_0, \rho_0^2) = \frac{\mathcal{N}(x_n \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_{n-1}, \rho_{n-1}^2)}{\int \mathcal{N}(x_n \mid \mu, \sigma_0^2)\mathcal{N}(\mu \mid m_{n-1}, \rho_{n-1}^2)\mathrm{d}\mu} .$$

問題 6

タンパク質 Y の生成，活性化について以下のような3つのモデルを考える．以下，タンパク質名とその濃度について同じ文字を用いて表すものとする．

1つ目のモデルでは，タンパク質 Y が一定の速度 β で生成され，一定の割合 α で分解されているとする（ただし α, β は非負の実数とする）．すなわち，タンパク質 Y の濃度の変化を

$$\frac{dY}{dt} = \beta - \alpha Y$$

と表すことにする．

以下の問いに答えよ．

(1) 定常状態におけるタンパク質 Y の濃度を求めよ．

(2) 時刻 $t = 0$ において，タンパク質 Y の濃度を 0 とする．このとき，タンパク質 Y の濃度を時間 t の関数として表せ．ただし $t \geq 0$ とする．

2つ目のモデルでは，タンパク質 Y の濃度が m 種類の転写因子によって制御されているとする．このとき，タンパク質 Y の濃度の変化を各転写因子の濃度 $X_1, \ldots, X_m$ を用いて

$$\frac{dY}{dt} = \prod_{j=1}^{m} X_j^{\gamma_j} - \alpha Y$$

と表す．ただし $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ は未知のパラメータである．

以下の問いに答えよ．

(3) 定常状態における $\log Y$ の値を，$X_1, \ldots, X_m$ および $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ を用いて表せ．

(4) 今，$X_1, \ldots, X_m$ を固定しその下で定常状態におけるタンパク質 Y の濃度を計測する実験を考える．異なる $X_1, \ldots, X_m$ の値の下でこの実験を n 回繰り返すとする．i 番目の実験データを $(Y_i, X_{i,1}, \ldots, X_{i,m})$ と表す（ただし $i = 1, \ldots, n$）．この一連の実験によって $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ を一意に決定するための実験の条件を示せ．

3つ目のモデルとして次のものを考える．タンパク質 X_1 と X_2 はリン酸化により活性化する．活性化された X_1 と X_2 は，タンパク質 Y をリン酸化する．これを

$$\frac{dY_p}{dt} = 3X_{p,1}Y_0 + 2X_{p,2}Y_0 - Y_p$$

とモデル化する．ここで，$X_{p,1}$ と $X_{p,2}$ はそれぞれリン酸化している X_1 とリン酸化している X_2 の濃度，Y_0 と Y_p はそれぞれリン酸化していない Y とリン酸化している Y の濃度を表す．ただし，$X_{p,1}$ と $X_{p,2}$ は時間に依らず一定とする．また，$Y_0 + Y_p = C$ （ただし C は定数）とする．

以下の問いに答えよ．

(5) 定常状態において Y_p/C が0.5 を超えるための $X_{p,1}$ と $X_{p,2}$ の条件を求めよ．

Problem 6

On generation and activation of protein Y we consider the following three models. In what follows we designate the name of protein and its concentration by the same symbol.

In the first model, protein Y is produced at a constant speed β and its degradation rate α is also constant (here α, β are nonnegative real values). That is, we describe the change of the concentration of protein Y by

$$\frac{dY}{dt} = \beta - \alpha Y \ .$$

Answer the following questions.

(1) Find the steady-state concentration of protein Y.

(2) We set the concentration of protein Y at time $t = 0$ to 0. Under this setting, express the concentration of protein Y as a function over time t (here $t \geq 0$).

In the second model, we suppose that m types of transcription factors control the concentration of protein Y. Let $X_1, \ldots, X_m$ be the concentrations of m transcription factors. We then describe the change of the concentration of protein Y by

$$\frac{dY}{dt} = \prod_{j=1}^{m} X_j^{\gamma_j} - \alpha Y \ ,$$

where $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ are unknown parameters.

Answer the following questions.

(3) Consider a steady state. Express the value of $\log Y$ in terms of $X_1, \ldots, X_m$ and $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

(4) Consider the following experiment: we measure the steady-state concentration of Y for fixed values of $X_1, \ldots, X_m$. Using different values of $X_1, \ldots, X_m$, we repeat this experiment n times. Let $(Y_i, X_{i,1}, \ldots, X_{i,m})$ be the i-th experimental data (where $i = 1, \ldots, n$). Give an experimental condition for this series of experiments to uniquely determine the parameters $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$.

As the third model we consider the following. Proteins X_1 and X_2 are activated by phosphorylation; and activated X_1 and X_2 phosphorylate protein Y. We describe this model by

$$\frac{dY_p}{dt} = 3X_{p,1}Y_0 + 2X_{p,2}Y_0 - Y_p \ ,$$

where: $X_{p,1}$ and $X_{p,2}$ are the concentrations of phosphorylated X_1 and phosphorylated X_2, respectively; and Y_0 and Y_p are the concentrations of non-phosphorylated Y and phosphorylated Y, respectively. Here we assume that $X_{p,1}$ and $X_{p,2}$ are constant over time, and that $Y_0 + Y_p = C$ (C is a constant).

Answer the following question.

(5) Find a condition on $X_{p,1}$ and $X_{p,2}$ so that, in a steady state, Y_p/C is greater than 0.5.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと。 Usable for memos; do not detach.