平成25年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

数学

平成25年2月5日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開けないこと．
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 2題すべてに答えよ．問題ごとに指定された解答用紙を使用すること．
Answer the following 2 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること．
Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

実数の全体を $\boldsymbol{R}$ と書く．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

によって決まる線形写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 写像 f の核 $Ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底を一組定めよ．

(3) $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$ を $\boldsymbol{R}^4$ の基底とし，$\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\}$ を $\boldsymbol{R}^3$ の基底とするとき，

$$(f(\boldsymbol{p}_1), f(\boldsymbol{p}_2), f(\boldsymbol{p}_3), f(\boldsymbol{p}_4)) = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)B$$

を満たす 3×4 行列 B を考える．

(a) $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) = I_4$, $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = I_3$ のとき，B を求めよ．ただし，I_r は r 次単位行列とする．

(b) $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) = P$, $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = Q$ とおく．このとき，B を A, P, Q を用いて表せ．

(c) 次に

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，ある $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ および Q に対して

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とできることを示せ．

Problem 1

Let $\boldsymbol{R}$ be the set of real numbers. Given a matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

define a linear mapping $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ as $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Answer the following questions.

(1) Determine the rank of the matrix A.

(2) Choose a basis of the kernel of the mapping f,

$$Ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

(3) Let $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4\}$ be a basis of $\boldsymbol{R}^4$, and let $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\}$ be a basis of $\boldsymbol{R}^3$. Let B be a 3×4 matrix that satisfies

$$(f(\boldsymbol{p}_1), f(\boldsymbol{p}_2), f(\boldsymbol{p}_3), f(\boldsymbol{p}_4)) = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3)B.$$

(a) Determine B for the case of $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) = I_4$ and $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = I_3$. Here I_r represents the identity matrix of size r.

(b) Let $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) = P$ and $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) = Q$. Represent B with A, P, and Q.

(c) Let

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Show that for some $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$, and Q, it holds that

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 2

十分な量の細胞が入った培養皿中へ，ウイルスが入った溶液を投入した．各細胞へのウイルス感染は独立に生じるものとし，ウイルスに感染する細胞数 $x \in \{0, 1, \ldots\}$ は次の確率を持つとする．

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)$$

ただし λ は $0 < \lambda < \infty$ なる定数で，

$$\exp(\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

である．

以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $M(t) = E_x[t^x]$, $(0 \leq t \leq 1)$ を求めよ．ここで $E_x[\cdot]$ は $P(x)$ による期待値を表す．

(2) $M(t)$ を用いて $E_x[x]$ および $E_x[x(x-1)]$ を求めよ．さらにこれらの結果から x の分散を求めよ．

(3) ウイルスに感染した細胞は確率 p で死滅するとする．また各細胞のウイルス感染による死滅は独立に生じるとする．ウイルス感染により死滅する細胞数を y とするとき，同時確率 $P(x, y)$ を求めよ．

(4) 同時確率 $P(x, y)$ より，確率 $P(y)$ を求めよ．また $P(y)$ による y の期待値および分散を求めよ．

Problem 2

Assume that a culture plate contains a large number of cells, and a solution containing viruses is put in the plate. The number of cells infected by the viruses $x \in \{0, 1, \ldots\}$ has the probability below:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda).$$

Here λ is a constant such that $0 < \lambda < \infty$. We assume that the cells are infected by the viruses independently. Note that

$$\exp(\lambda) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Answer the following questions.

(1) Find $M(t) = E_x[t^x]$, $(0 \leq t \leq 1)$, where $E_x[\cdot]$ represents an expectation under the probability $P(x)$.

(2) Calculate $E_x[x]$ and $E_x[x(x-1)]$ by using $M(t)$. Then calculate the variance of x from those results.

(3) Assume that cells infected by the viruses are killed with the probability p, and that the death of each infected cell occurs independently. Let y be the number of cells that are killed by the virus infection. Calculate the joint probability $P(x, y)$.

(4) Calculate the probability $P(y)$ from the joint probability $P(x, y)$. Then calculate the expectation and the variance of y under the probability $P(y)$.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.