平成 25 年度

東京大学大学院情報理工学系研究科

コンピュータ科学専攻

入学試験問題

専門科目 II

平成 24 年 8 月 21 日

13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

ベクトル列 $\{\boldsymbol{x}_n \in \mathbf{R}^2\}$, $\{\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{R}^3\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ を考える．各要素間には以下の関係があるとする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{n+1} &= A\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{y}_n &= B\boldsymbol{x}_n \end{aligned}$$

ただし

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．

下記の問いに答えよ．

(1) $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^\top$ を満たす行列 P および，スカラー値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ かつ $a > 0$, $b < 0$, $\lambda_1 > \lambda_2$ とする．また $P^\top$ は P の転置行列を表す．

(2) $\boldsymbol{x}_n = C\boldsymbol{x}_0$ なる行列 C を求めよ．

(3) $B = U\Sigma P^\top$ を満たす 3×2 行列 U と 2×2 行列 Σ を求めよ．ただし U は $U^\top U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす行列，Σ は対角要素が正の対角行列とする．

(4) 問い (3) の結果を用いて，$\boldsymbol{y}_n = D\boldsymbol{y}_{n-1}$ なる行列 D を求めよ．

(5) $\boldsymbol{y}_n = E\boldsymbol{y}_0$ なる行列 E を求めよ．

Problem 1

Let $\{\boldsymbol{x}_n \in \mathbf{R}^2\}$, $\{\boldsymbol{y}_n \in \mathbf{R}^3\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ be sequences of vectors for which the following relations hold:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n \ ,$$
$$\boldsymbol{y}_n = B\boldsymbol{x}_n \ ,$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Find a matrix P and scalars λ_1 and λ_2 that satisfy $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^\top$, where $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and $a > 0$, $b < 0$, $\lambda_1 > \lambda_2$. Here the matrix $P^\top$ is the transpose of P.

(2) Find a matrix C such that $\boldsymbol{x}_n = C\boldsymbol{x}_0$.

(3) Find a 3×2 matrix U and a 2×2 matrix Σ that satisfy $B = U\Sigma P^\top$. Here U must satisfy $U^\top U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, and Σ must be a diagonal matrix with positive diagonal elements.

(4) Find a matrix D such that $\boldsymbol{y}_n = D\boldsymbol{y}_{n-1}$, using the answer of Question (3).

(5) Find a matrix E such that $\boldsymbol{y}_n = E\boldsymbol{y}_0$.

問題 2

ラベルの集合 L について，辺にラベルの付いた有限有向グラフ $G=(V,E)$ を考える．ただし，

- V は頂点の集合,
- $E \subseteq V \times L \times V$ はラベルの付いた辺の集合

である．また，L,V,E はすべて有限集合とし，$V \neq \emptyset$ かつ $L \neq \emptyset$，また $\mathcal{P}(L)$ は L の冪集合を表すものとする．

ここで，$Q,Q' \subseteq V \times V \times \mathcal{P}(L)$ を変数とし，次の手続き $(*)$ を考える．

$Q := \{\, (v,v,\emptyset) \mid v \in V \,\}$;
`repeat` [
  $Q' := \{\, (v,w',A \cup \{a\}) \mid (v,w,A) \in Q \text{ and } (w,a,w') \in E \,\} \;\cup\; Q$;
  `if` $Q = Q'$ `then` `done` `else` $Q := Q'$
]

ここで `repeat`[c] は，`done` が実行されるまでの間，その内容 c を繰り返し実行することを表す．手続き $(*)$ を実行した後の，Q の値を Q_∞ と書く．

以下の問いに答えよ．

(1) 手続き $(*)$ が停止することを証明せよ．

(2) 2 つの頂点 $v,w \in V$ に対して，v から w に至る経路

$$v = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \ldots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = w$$

が存在するかどうか調べたい (ラベルは問わない)． このことは Q_∞ を用いてどのように判定できるか．

(3) ラベル $a \in L$ と頂点 $v \in V$ について，

v から始まる無限経路

$$v = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots$$

で，ラベル a の辺を通らないものが存在する

という性質が成立するかどうか調べたい．Q_∞ を用いて判定する方法を述べよ．

(4) ラベル $a \in L$ と頂点 $v \in V$ について，

v から始まる任意の無限経路

$$v = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots$$

は次の条件をみたす： 任意の $n \geq 0$ に対して $m \geq n$ なる m が存在して $a_m = a$

という性質が成立するかどうか調べたい．Q_∞ を用いて判定する方法を述べよ．

(5) Q_∞ を並列計算する方法について，アイデアを述べよ．

Problem 2

Let L be a fixed set of labels, and let $G = (V, E)$ be a finite directed graph whose edges are labeled from L. That is:

- V is the set of vertices; and
- $E \subseteq V \times L \times V$ is the set of L-labeled edges.

We assume that L, V, E are all finite, $V \neq \emptyset$, and $L \neq \emptyset$. We denote the powerset of L by $\mathcal{P}(L)$.

Now let $Q, Q' \subseteq V \times V \times \mathcal{P}(L)$ be variables and consider the following procedure $(*)$.

$$
\begin{array}{l}
Q := \{\, (v, v, \emptyset) \mid v \in V \,\}; \\
\texttt{repeat} \ \Big[\\
\quad Q' := \{\, (v, w', A \cup \{a\}) \mid (v, w, A) \in Q \text{ and } (w, a, w') \in E \,\} \ \cup \ Q; \\
\quad \texttt{if} \ \ Q = Q' \ \ \texttt{then} \ \ \texttt{done} \ \ \texttt{else} \ \ Q := Q' \\
\Big]
\end{array}
$$

Here $\texttt{repeat}[c]$ means repeating c until the command $\texttt{done}$ is executed. We denote the value of Q after the execution of $(*)$ by Q_∞.

Answer the following questions.

(1) Prove that the procedure $(*)$ terminates.

(2) We wish to know whether, given two vertices $v, w \in V$, there is a path

$$v = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} v_n = w$$

from v to w (the labels do not matter). Describe how to check it using Q_∞.

(3) Given a label $a \in L$ and a vertex $v \in V$, we wish to know if the following property holds.

> There exists an infinite path starting from v
>
> $$v = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots$$
>
> that does not contain the label a.

Describe how to check it using Q_∞.

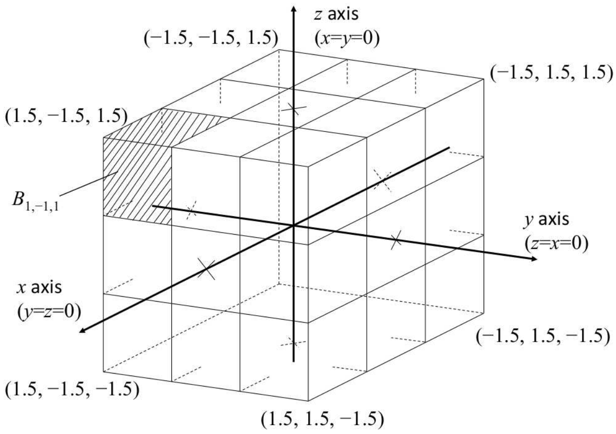
(4) Given a label $a \in L$ and a vertex $v \in V$, we wish to know if the following property holds.

> Any infinite path starting from v
>
> $$v = v_0 \xrightarrow{a_0} v_1 \xrightarrow{a_1} \cdots$$
>
> satisfies: for any $n \geq 0$, there is $m \geq n$ such that $a_m = a$.

Describe how to check it using Q_∞.

(5) Describe your idea how to parallelize the computation of Q_∞.

問題 3



以下では，ルービック・キューブの xyz 空間内でのモデリングを考える．27 個の 1 辺の長さ 1 の立方体 $B_{i,j,k}$ $(i,j,k \in \{-1,0,1\})$ からなる立方体集合 A 中の各立方体を，ある初期配置から再配置していくことを考えよう．

初期配置において，各立方体 $B_{i,j,k}$ の中心は座標 (i,j,k) に置かれ，その各面は xy 平面，yz 平面，zx 平面のいずれかに必ず平行になるように配置されている．たとえば，立方体 $B_{1,-1,1}$ の初期状態での位置は，図に示すとおりである．なお，この初期状態で $B_{i,j,k}$ が配置されている立方体の位置を $L_{i,j,k}$ と表すものとする．

また，平面 $P_1, P_2, \ldots, P_6$ を それぞれ平面 $x = 1.5$，$x = -1.5$，$y = 1.5$，$y = -1.5$，$z = 1.5$，$z = -1.5$ と定める．各立方体の面のうち，初期配置において平面 P_i に載っている面を色 C_i $(i \in \{1,2,\ldots,6\})$ で塗り，これらの 6 つのいずれの平面にも載っていない面は色 C_0 で塗るものとする．なお，これらの色 C_i $(i \in \{0,1,\ldots,6\})$ はすべて相異なるものとする．

また，X_ℓ を，$L_{i,j,k}$ $(i=\ell)$ に配置されている 9 個の立方体の集合，Y_ℓ を，$L_{i,j,k}$ $(j=\ell)$ に配置されている 9 個の立方体の集合，Z_ℓ を，$L_{i,j,k}$ $(k=\ell)$ に配置されている 9 個の立方体の集合，と定める．ここで，立方体集合 A に対して，以下の $3 \times 3 = 9$ 通りの操作を行うことを考える．

(a$_\ell$) X_ℓ に属する 9 つの立方体すべてを x 軸 $(y=z=0)$ に関して時計回りに 90 度回転させる．
(b$_\ell$) Y_ℓ に属する 9 つの立方体すべてを y 軸 $(z=x=0)$ に関して時計回りに 90 度回転させる．
(c$_\ell$) Z_ℓ に属する 9 つの立方体すべてを z 軸 $(x=y=0)$ に関して時計回りに 90 度回転させる．

たとえば，操作 (b$_{-1}$) によって，$L_{1,-1,1}$ に存在した立方体は $L_{-1,-1,1}$ に移動する．その際，元々平面 P_5 に載っていたその立方体の面は P_2 上に移動する．

また，各立方体 $B_{i,j,k}$ の位置および，それぞれの立方体の面の色の向きの組み合わせを A の状態とよぶ．すなわち，A 中のある立方体が回転しても，それらのすべての向きの面の色が同じであれば，二つの状態は区別しない．たとえば，$B_{0,0,0}$ はすべての面が色 C_0 で塗られており，また位置も不変であるため，どのような操作をしても操作前と操作後の $B_{0,0,0}$ の状態を区別することはできない．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 初期状態から 2 つの操作（同じでもよい）を行って作られる A の状態は何通りあるか？

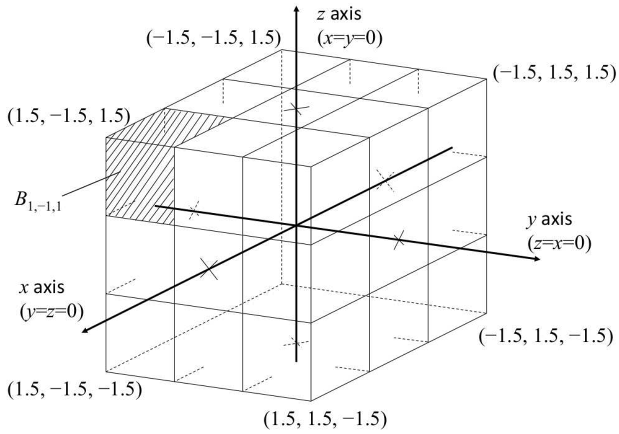
(2) 27個の立方体 $B_{i,j,k}$ $(i,j,k \in \{-1,0,1\})$ を，色 C_0 が塗られた面が 6 つの平面 P_i $(i \in \{1,2,\ldots,6\})$ に載らないようにして位置 $L_{i,j,k}$ $(i,j,k \in \{-1,0,1\})$ に再配置することを考える．このとき，操作 (a$_\ell$), (b$_\ell$), (c$_\ell$) にとらわれることなく，各立方体を自由に移動・回転させて良い．また，異なる立方体は異なる位置に配置するものとする．このようにして得られる A の状態は何通りあるか．なお，$a!$，a^b(a, b は整数), およびかけ算の記法 ($\times$) は解答に使ってよい (例：$5! \times 3^4 \times 7$).

(3) (2) で求めた状態数のうち，$1/(2^3 \times 3^2 \times 5)$ の数の状態は，初期状態から操作 (a$_\ell$), (b$_\ell$), (c$_\ell$) を繰り返すことで到達可能であることが知られている．このことを利用し，初期状態から到達可能だが，初期状態からその状態に到達するには最低 22 回以上の操作が必要な A の状態が必ず存在することを証明せよ．ただし，以下の事実を用いてよい．

$$1.58 < \log_2 3 < 1.59 \quad 2.32 < \log_2 5 < 2.33 \quad 2.80 < \log_2 7 < 2.81$$
$$3.45 < \log_2 11 < 3.46 \quad 3.70 < \log_2 13 < 3.71 \quad 4.08 < \log_2 17 < 4.09$$

Problem 3

Here we model Rubik's Cube in the xyz-space. We relocate cubes in the set A of 27 cubes $B_{i,j,k}$ ($i, j, k \in \{-1, 0, 1\}$), from a certain initial state; each edge of the cubes is of length 1.



In the initial state, the center of a cube $B_{i,j,k}$ is located at the point (i, j, k), and every face of each cube is parallel to one of the xy-plane, the yz-plane, and the zx-plane. For example, $B_{1,-1,1}$ in the initial state is shown in the figure. The position where $B_{i,j,k}$ is located in this initial state is denoted by $L_{i,j,k}$.

Let $P_1, P_2, \ldots, P_6$ be the planes $x = 1.5, x = -1.5, y = 1.5, y = -1.5, z = 1.5, z = -1.5$, respectively. A face of each cube is colored with a color C_i if the face is on plane P_i in the initial state. If a face is not on any of P_i, it is colored with a color C_0. All of these colors C_i ($i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$) are different from each other.

Let X_ℓ denote the set of 9 cubes located at $L_{i,j,k}$ ($i = \ell$), Y_ℓ denote the set of 9 cubes located at $L_{i,j,k}$ ($j = \ell$), and Z_ℓ denote the set of 9 cubes located at $L_{i,j,k}$ ($k = \ell$). Consider the following $3 \times 3 = 9$ kinds of operations on the cube set A.

(a_ℓ) Rotate clockwise all the 9 cubes in X_ℓ around the x axis ($y = z = 0$) by 90 degrees.
(b_ℓ) Rotate clockwise all the 9 cubes in Y_ℓ around the y axis ($z = x = 0$) by 90 degrees.
(c_ℓ) Rotate clockwise all the 9 cubes in Z_ℓ around the z axis ($x = y = 0$) by 90 degrees.

For example, a cube at $L_{1,-1,1}$ will be moved to $L_{-1,-1,1}$ by the operation (b_{-1}). Note that the face of the cube on the plane P_5 will be moved to be on the plane P_2.

The positions of the cubes $B_{i,j,k}$, together with the colors on each face of these cubes, determine the *state* of the cube set A. Note that rotations that do not change the face colors do not affect a state. For example, the states of the cube $B_{0,0,0}$ before and after applying any of the 9 operations cannot be distinguished: all the faces of $B_{0,0,0}$ are colored by the same color C_0, and the position of $B_{0,0,0}$ stays the same. Answer the following questions.

(1) Let us apply two out of the above 9 operations, one after the other (the two can be the same). How many states are possible after such applications?

(2) Consider relocation of all the 27 cubes $B_{i,j,k}$ ($i, j, k \in \{-1, 0, 1\}$) to some of the positions $L_{i,j,k}$ ($i, j, k \in \{-1, 0, 1\}$) such that the faces with the color C_0 will not be on any of the planes P_i ($i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$). This time we can freely move and rotate the cubes, not bound by the 9 operations (a_ℓ), (b_ℓ), (c_ℓ), but no two cubes should be located at the same position. How many states are possible after such relocation? You can use notations $a!$, a^b and $\times$ (multiplication) in the answer, where a and b are integers (e.g. $5! \times 3^4 \times 7$).

(3) It is known that, among all the states that are obtained by the relocation in (2), $1/(2^3 \times 3^2 \times 5)$ of them can be reached from the initial state using the 9 operations (a_ℓ), (b_ℓ), (c_ℓ) repeatedly.

Prove that there exists a state that is reachable in this manner from the initial state, but requires at least 22 applications to do so. You can use the following facts.

$$1.58 < \log_2 3 < 1.59 \quad 2.32 < \log_2 5 < 2.33 \quad 2.80 < \log_2 7 < 2.81$$
$$3.45 < \log_2 11 < 3.46 \quad 3.70 < \log_2 13 < 3.71 \quad 4.08 < \log_2 17 < 4.09$$

問題 4

動的スケジューリングを用いる out-of-order instruction issue, out-of-order instruction completion プロセッサアーキテクチャについて，以下の問いに答えよ．

(1) パイプラインアーキテクチャを採用しても，一般にパイプライン段数に比例する性能向上が得られないのはなぜか．2∼3 行で説明せよ．

(2) 動的スケジューリングの利点と欠点を，静的スケジューリングと対比して 3∼5 行で述べよ．

(3) 命令キューは，発行（issued）されたが完了（completed）していない命令を保持するバッファである．　命令が命令キューに挿入される条件と，命令が命令キューから削除される条件を述べよ．

(4) 例を用い，実行中に命令がどのようにスケジュールされるか説明せよ．

(5) 動的スケジューリングを用いるプロセッサの性能を向上させるためには高精度の分岐予測が重要である．この理由を述べよ．

Problem 4

Answer the following questions on dynamic scheduling of an out-of-order instruction issue, out-of-order instruction completion processor architecture.

(1) Adopting a pipeline architecture generally does not yield performance improvement that is proportional to the number of stages. Explain why, in 2 to 3 lines.

(2) Describe pros and cons of dynamic scheduling, compared to static scheduling, in 3 to 5 lines.

(3) An instruction queue is a buffer that holds instructions issued but not completed. Describe the conditions to insert an instruction to the instruction queue; and the conditions to remove an instruction from the instruction queue.

(4) Explain how instructions are scheduled during execution, using an example.

(5) Describe why high-precision branch prediction is important to improve performance of a processor with dynamic scheduling.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと．Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.