平成24年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成24年2月8日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take this problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

問題 1

　3 次元座標 (x, y, z) から (x', y', z') への座標変換は，次のような同次座標表現と 4×4 の行列 $\mathbf{M}$ を用いて表現することができる．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

行列 $\mathbf{M}$ として次のようなものを考える．

- $\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z)$:　(t_x, t_y, t_z) だけ平行移動
- $\mathbf{R}_x(\cos\theta, \sin\theta)$:　x 軸中心の角度 θ の回転
- $\mathbf{R}_y(\cos\theta, \sin\theta)$:　y 軸中心の角度 θ の回転
- $\mathbf{R}_z(\cos\theta, \sin\theta)$:　z 軸中心の角度 θ の回転

ただし座標系は右手系であるとし，回転は各軸の正方向から見て反時計回りに回転するとする．
　以下の問いに答えよ．

(1) 4×4 行列 $\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z), \mathbf{R}_x(\cos\theta, \sin\theta), \mathbf{R}_y(\cos\theta, \sin\theta), \mathbf{R}_z(\cos\theta, \sin\theta)$ の要素を具体的に記せ．

　次に，直線

$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y} = \frac{z - z_0}{l_z}$$

を回転軸として角度 θ だけ回転する変換行列 $\mathbf{P}$ を考える．ただし $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$ とし，ベクトル (l_x, l_y, l_z) を回転軸の正方向とする．変換行列 $\mathbf{P}$ は以下の行列 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{D}$ を用いて表すことができる．

- 回転軸が原点を通るよう平行移動する行列 $\mathbf{A}$
- x 軸中心に回転して回転軸を xz 平面上に移動させる行列 $\mathbf{B}$
- y 軸中心に回転して回転軸を z 軸に一致させる行列 $\mathbf{C}$
- z 軸中心に角度 θ だけ回転する行列 $\mathbf{D}$

(2) $\mathbf{A}$ の要素を具体的に記せ．

(3) $\mathbf{B}$ の要素を具体的に記せ．

(4) $\mathbf{C}$ の要素を具体的に記せ．

(5) $\mathbf{P}$ を $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$，$\mathbf{D}$ を用いて表わせ．

Problem 1

Let us represent a transformation from 3D coordinates (x, y, z) to (x', y', z'), using their homogeneous coordinate representations and a 4×4 matrix $\mathbf{M}$ as follows.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

We consider the following matrices as the transformation matrix $\mathbf{M}$.

- $\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z)$: translation by a 3D vector (t_x, t_y, t_z)
- $\mathbf{R}_x(\cos\theta, \sin\theta)$: rotation by an angle θ about the x-axis
- $\mathbf{R}_y(\cos\theta, \sin\theta)$: rotation by an angle θ about the y-axis
- $\mathbf{R}_z(\cos\theta, \sin\theta)$: rotation by an angle θ about the z-axis

Assume that the coordinate system is right-handed and the positive rotation angle is directed counter-clockwise when we see the corresponding coordinate axis from the positive to the negative direction.

Answer the following questions.

(1) Write the elements of the 4×4 matrices $\mathbf{T}(t_x, t_y, t_z), \mathbf{R}_x(\cos\theta, \sin\theta), \mathbf{R}_y(\cos\theta, \sin\theta)$ and $\mathbf{R}_z(\cos\theta, \sin\theta)$.

Next we consider the transformation matrix $\mathbf{P}$ for rotation by an angle θ about the rotation axis defined by

$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y} = \frac{z - z_0}{l_z} .$$

Here $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$ and the vector (l_x, l_y, l_z) is the rotation axis' positive direction. The matrix $\mathbf{P}$ can be expressed using the following matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ and $\mathbf{D}$.

- $\mathbf{A}$ represents the translation so that the rotation axis passes through the origin of the coordinate system,
- $\mathbf{B}$ represents the rotation about the x-axis so that the rotation axis lies on the xz-plane,
- $\mathbf{C}$ represents the rotation about the y-axis so that the rotation axis lies along the z-axis, and
- $\mathbf{D}$ represents the rotation by the angle θ about the z-axis.

(2) Write the elements of $\mathbf{A}$.

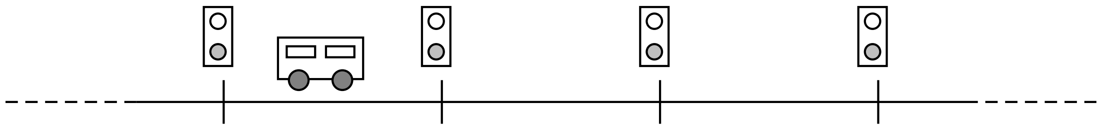
(3) Write the elements of $\mathbf{B}$.

(4) Write the elements of $\mathbf{C}$.

(5) Express the matrix $\mathbf{P}$ using $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, and $\mathbf{D}$.

問題 2

列車制御システムの開発において，システムの仕様を一階述語論理上の非負整数の理論で記述することを考える．対象となるシステムは，信号機を操作することにより，列車の動作を制御する．列車の制御はブロック単位で行い，各ブロックの終端に信号が設置されている．



仕様記述においては，以下の構文要素を用いるものとする．

- 変数記号：t, t_1, t_2, v, b など
- 非負整数の理論の記号：0 (定数)，$'$ (後継者演算子，t' は $t+1$ を意味する)，$=$ (等号)，$\geq$ (大小関係)
- 仕様記述のための述語記号：後述の $\mathrm{at}(t,v,b)$，$\mathrm{go}(t,b)$

時刻を t, t_1, t_2 で，列車の ID を v で，および，ブロックの ID を b で表す．なお b は，列車の進む方向に 1 ずつ増える非負整数であるものとする (したがって，ブロック b にいる列車が進むと，ブロック b' に入るようにしたい)．これらを用いて，以下のような述語記号を用意する．

- $\mathrm{at}(t,v,b)$：時刻 t において列車 v がブロック b にいる
- $\mathrm{go}(t,b)$：時刻 t においてブロック b から b' への信号が青である

以上の準備のもとに，本システムの仕様

「列車 v がブロック b にいると，そのうちいつか必ず，列車 v はブロック b' に移動する」

を，次の論理式によって記述することを考える．

$$\Phi:\ \mathrm{at}(t,v,b) \Rightarrow \exists t_1\big(\, t_1 \geq t \wedge \mathrm{at}(t_1,v,b')\,\big)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 次の 3 つの論理式 Φ_1, Φ_2, Φ_3 が，$\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3 \Rightarrow \Phi$ を満たすことを証明せよ．

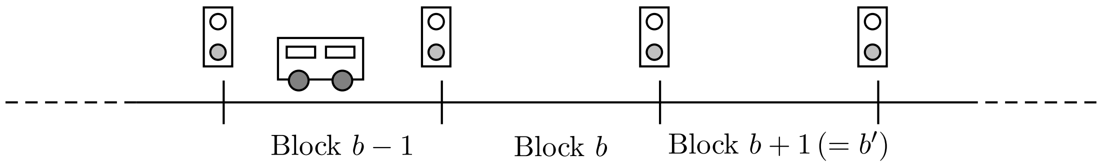
$$\begin{aligned}
\Phi_1:&\ \ \big(\mathrm{at}(t,v,b) \wedge \mathrm{go}(t,b)\big) \Rightarrow \exists t_1\big(\, t_1 \geq t \wedge \mathrm{at}(t_1,v,b')\,\big)\\
\Phi_2:&\ \ \mathrm{at}(t,v,b) \Rightarrow \exists t_1\big(\, t_1 \geq t \wedge \mathrm{go}(t_1,b)\,\big)\\
\Phi_3:&\ \ \mathrm{at}(t,v,b) \Rightarrow \forall t_1\Big(\, \forall t_2\big((t_2 \geq t \wedge t_1 \geq t_2) \Rightarrow \neg\mathrm{at}(t_2,v,b')\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \forall t_2\big((t_2 \geq t \wedge t_1 \geq t_2) \Rightarrow \mathrm{at}(t_2,v,b)\big)\,\Big)
\end{aligned}$$

(2) 3 つの論理式 Φ_1, Φ_2, Φ_3 の意味をそれぞれ文章で表せ．

(3) Φ_3 を入れずに $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \Rightarrow \Phi$ を考えると，これは成立するとは限らない．そこで，$\Phi_1 \wedge \Phi_2$ が成り立っても Φ が成り立たないような状況の例を示せ．

Problem 2

We are to describe specifications of a train control system in a first-order theory of non-negative integers. The target system controls trains by signals. The track is divided into blocks; and there is a signal at the end of each block.



The first-order theory comes with the following symbols.

- Variables: t, t_1, t_2, v, b and so on
- Symbols for non-negative integers: 0 (a constant), $'$ (the successor function; t' means $t+1$), $=$ (equality) and $\geq$ (inequality)
- Predicate symbols for describing specifications (introduced later): $\mathrm{at}(t, v, b)$ and $\mathrm{go}(t, b)$

We shall represent time by t, t_1, t_2; a train's identifier by v; and a block's identifier by b. We assume that b increases by 1 in the direction of the trains' movement. Therefore, a train at the block b is expected to move ahead to the block b'. Following those conventions, we introduce the following predicate symbols.

- $\mathrm{at}(t, v, b)$: the train v is at the block b at time t
- $\mathrm{go}(t, b)$: at time t, the signal between the blocks b and b' says "go"

Now, the following specification

"if the train v is at the block b, the train v will eventually move to the block b'"

can be formally described as follows.

$$\Phi \ : \ \mathrm{at}(t, v, b) \Rightarrow \exists t_1 \big(t_1 \geq t \wedge \mathrm{at}(t_1, v, b') \big)$$

Answer the following questions.

(1) Prove that the following three formulas Φ_1, Φ_2 and Φ_3 satisfy $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3 \Rightarrow \Phi$.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 : &\quad \big(\mathrm{at}(t, v, b) \wedge \mathrm{go}(t, b) \big) \Rightarrow \exists t_1 \big(t_1 \geq t \wedge \mathrm{at}(t_1, v, b') \big) \\
\Phi_2 : &\quad \mathrm{at}(t, v, b) \Rightarrow \exists t_1 \big(t_1 \geq t \wedge \mathrm{go}(t_1, b) \big) \\
\Phi_3 : &\quad \mathrm{at}(t, v, b) \Rightarrow \forall t_1 \big(\forall t_2 \big((t_2 \geq t \wedge t_1 \geq t_2) \Rightarrow \neg \mathrm{at}(t_2, v, b') \big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \forall t_2 \big((t_2 \geq t \wedge t_1 \geq t_2) \Rightarrow \mathrm{at}(t_2, v, b) \big) \big)
\end{aligned}$$

(2) Describe (in English or Japanese) the meaning of each of the formulas Φ_1, Φ_2 and Φ_3.

(3) If we drop Φ_3, it is not necessarily the case that $\Phi_1 \wedge \Phi_2 \Rightarrow \Phi$ is true. Describe an example where $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ is true while Φ is not.

問題 3

チェイン法によるハッシュテーブルについて以下の問いに答えよ．ただし，要素は整数を仮定する．

(1) ハッシュテーブルに対して次の要素 32, 18, 19, 21, 22 をこの順に挿入した時のハッシュテーブルの状態を図示せよ．ただし，ここでのハッシュテーブルのサイズは 5 とする．またハッシュ関数は，与えられた要素の値を 5 で割った余りを返す関数とする．

(2) サイズ m のハッシュテーブルに n 個の要素が既に入っているときに，その中の一要素を探索することを考える．最悪の場合の時間計算量を求めよ．

(3) 問い (2) と同じハッシュテーブルの探索について，平均の場合の計算量を求めよ．ただし，ハッシュ関数として理想的な一様ハッシュを仮定する．

(4) 問い (2) のハッシュテーブルにおいて，各チェインを 2 分探索木に変更することを考える．この場合のハッシュの探索について，最悪および平均の時間計算量を求めよ．

Problem 3

Answer the following questions on a chained hash table. Here the elements of a hash table are assumed to be integers.

(1) Consider a hash table whose size is five, with a hash function that returns the remainder of the inserted value divided by five. For this hash table, draw its internal state after the insertion operations of integers 32, 18, 19, 21 and 22 in this order.

(2) Assume a search of an element in a hash table, when the size of the hash table is m, and n elements are stored in it. Find the worst-case time-complexity of the search.

(3) Find the average time-complexity of a search for the hash table in Question (2). Assume that the hash function returns uniformly distributed hash values.

(4) For the hash table in Question (2), consider a new hash algorithm where each chain is replaced with a binary search tree. For the new hash algorithm, find the worst-case and average time-complexity of a search.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.

余白 (blank page)

計算などに使ってもよいが，切り離さないこと． Usable for memos; do not detach.