平成24年度

東京大学大学院情報理工学系研究科

コンピュータ科学専攻

入学試験問題

専門科目 II

平成23年8月23日

13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.

Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

問題 1

A を $n \times n$ の複素行列とする．A の固有値のひとつを λ, 対応する固有ベクトルのひとつを $\boldsymbol{x}$ とする．$\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}$ を入力として，以下の条件 1 を満たす $n \times (n-1)$ 行列 X をひとつ計算するアルゴリズムを示せ．

条件 1：$W = (\boldsymbol{x}\ X)$ とすると，W がユニタリ行列である．

(2) 問い (1) のように X と W を取る．

$$W^* A W = \begin{pmatrix} a & \boldsymbol{b}^\top \\ \boldsymbol{c} & D \end{pmatrix}$$

とするとき，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることを示せ．ただし a は複素数，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は $n-1$ 次列ベクトル，D は $(n-1) \times (n-1)$ 行列である．また，W^* は W の複素共役転置，$\boldsymbol{b}^\top$ は $\boldsymbol{b}$ の転置を表す．

(3) 以下の条件 2 を満たすユニタリ行列 U があることを示せ．

条件 2：$T = U^* A U$ が上三角行列である．

(4) 問い (3) のように T を定める．A が正規行列のとき，T は対角行列であることを示せ．

Problem 1

Let A be an $n \times n$ complex matrix. Let λ be an eigenvalue of A, and $\boldsymbol{x}$ be a corresponding eigenvector. Assume that $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$.

Answer the following questions.

(1) Show an algorithm that takes the vector $\boldsymbol{x}$ as an input and calculates an $n \times (n-1)$ matrix X that satisfies the following Condition 1.

Condition 1: $W = (\boldsymbol{x}\ X)$ is a unitary matrix.

(2) X and W are defined as in question (1). Let

$$W^*AW = \begin{pmatrix} a & \boldsymbol{b}^\top \\ \boldsymbol{c} & D \end{pmatrix}.$$

Here a is a complex number, $\boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{c}$ are column vectors with length $n-1$, and D is an $(n-1) \times (n-1)$ matrix. Note that W^* represents the complex conjugate transpose of W and $\boldsymbol{b}^\top$ represents the transpose of $\boldsymbol{b}$. Prove that $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$.

(3) Prove that there is a unitary matrix U that satisfies the following Condition 2.

Condition 2: $T = U^*AU$ is an upper triangular matrix.

(4) T is defined as in question (3). Show that T is a diagonal matrix when A is a normal matrix.

問題 2

自然数 $i \in [0, 2^n - 1]$ の n ビットによる表現を考えると，通常の 2 進数としてのビット表現 $(a_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ 以外にもさまざまなものが考えられる．それらのうち，次の条件 A を満たすようなビット表現 $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ を考える．

条件 A:
- $b_0 = \mathbf{0}$ である．
- 各 $i \in [0, 2^n - 2]$ に対して，b_i と b_{i+1} とを比較すると 1 ビット異なる．
- b_{2^n-1} と b_0 とを比較した場合も 1 ビット異なる．
- $i, j \in [0, 2^n - 1]$ に対して，$i \neq j$ なら $b_i \neq b_j$ である．

ここで $\mathbf{0}$ は n 桁のビット列 $00\ldots0$ を表す．

たとえば $n = 2$ のとき，通常の 2 進数としてのビット表現 $(a_i)_{i\in[0,3]}$ は左下のようになる．また，条件 A を満たすビット表現 $(b_i)_{i\in[0,3]}$ は右下の 2 種類しかない．

a_0	a_1	a_2	a_3
00	01	10	11

b_0	b_1	b_2	b_3
00	01	11	10
00	10	11	01

以下の問いに答えよ．

(1) $n = 3$ のとき，条件 A を満たすビット表現 $(b_i)_{i\in[0,7]}$ は何種類あるか．

(2) 条件 A をみたすビット表現 $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ のうちのある一種類については，通常の 2 進ビット表現 $(a_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ から以下の手続きで計算できる．

$$b_i \ = \ a_i \ \boxed{\text{i}} \ (\ a_i \ \boxed{\text{ii}} \ 1 \ )$$

ただし空欄 $\boxed{\text{i}}$, $\boxed{\text{ii}}$ にはそれぞれ以下の表で示す演算子のいずれかが入る．これらの空欄に当てはまる演算子を答えよ．

演算子	説明
`a	b`	a と b のビットごと論理和.
`a & b`	a と b のビットごと論理積.
`a ^ b`	a と b のビットごと排他的論理和.
`a << x`	a を左に x ビットシフトさせる．右端には 0 を埋める.
`a >> x`	a を右に x ビットシフトさせる．左端には 0 を埋める.

(3) 問い (2) の手続きによって計算されるビット表現 $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ が，確かに条件 A を満たすことを示せ．

(4) 逆に，問い (2) で得られたビット表現 $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ から $(a_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ を計算する手続きを以下のように表すことができる．ただし空欄 $\boxed{\text{iii}}$, $\boxed{\text{iv}}$ にはそれぞれ問い (2) の表に示した演算子のいずれかが入る．これらの空欄に当てはまる演算子を答えよ．

```
c = 0;
for (d = b_i; d != 0; d = d [iii] 1){
      c = c [iv] d;
}
return c;
```

Problem 2

Consider those natural numbers $i \in [0, 2^n - 1]$ which can be represented by n bits. There are many different representations other than the standard binary representation (which we denote by $(a_i)_{i\in[0,2^n-1]}$). Let us consider representations $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ that satisfy the following Condition A.

Condition A :
- $b_0 = \mathbf{0}$.
- For each $i \in [0, 2^n - 2]$, the bit strings b_i and b_{i+1} differ by one bit.
- Furthermore, b_{2^n-1} and b_0 differ by one bit.
- For any $i, j \in [0, 2^n - 1]$, if $i \neq j$ then $b_i \neq b_j$.

Here $\mathbf{0}$ denotes the n-bit sequence $00\ldots0$.

For example, when $n = 2$, the standard binary representation $(a_i)_{i\in[0,3]}$ is as shown below on the left; and those shown below on the right are the only two different representations $(b_i)_{i\in[0,3]}$ that satisfy Condition A.

a_0	a_1	a_2	a_3
00	01	10	11

b_0	b_1	b_2	b_3
00	01	11	10
00	10	11	01

Answer the following questions.

(1) Let $n = 3$. How many different representations $(b_i)_{i\in[0,7]}$ are there that satisfy Condition A?

(2) One certain representation $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ that satisfies Condition A can be computed in the following way, from the standard binary representation $(a_i)_{i\in[0,2^n-1]}$.

$$b_i \;=\; a_i \boxed{\text{i}} \texttt{ (} a_i \boxed{\text{ii}} \texttt{ 1)}$$

Here $\boxed{\text{i}}$ and $\boxed{\text{ii}}$ stand for one of the following operators, respectively. Find which.

Operator	Description
`a	b`	bitwise OR operation of `a` and `b`.
`a & b`	bitwise AND operation of `a` and `b`.
`a ^ b`	bitwise XOR operation of `a` and `b`.
`a << x`	`a` shifted `x` bits to the left. Rightmost bits are filled with 0.
`a >> x`	`a` shifted `x` bits to the right. Leftmost bits are filled with 0.

(3) Show that the representation $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ obtained in question (2) indeed satisfies Condition A.

(4) Conversely, the following procedure computes the standard binary representation $(a_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ from the representation $(b_i)_{i\in[0,2^n-1]}$ obtained in question (2). Choose, from the table in question (2), appropriate operators for $\boxed{\text{iii}}$ and $\boxed{\text{iv}}$.

```
c = 0;
for (d = b_i ; d != 0; d = d [iii] 1){
      c = c [iv] d;
}
return c;
```

問題 3

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ を非負整数の全体，x を $\mathbf{N}$ 上を動く変数，$b(x)$ および $f(x)$ を $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への帰納的な（すなわち計算可能な）全域関数，P を次のプログラムとする．

$$
\begin{array}{l}
\textbf{while} \quad b(x) = 0 \quad \textbf{do} \quad \{ \\
\quad x := f(x); \\
\} \\
\textbf{return} \quad x;
\end{array}
$$

任意の部分集合 $S \subseteq \mathbf{N}$ に対して，$\mathrm{wp}(S) \subseteq \mathbf{N}$ を次のような集合と定義する．

$$
\left\{ n \in \mathbf{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{初期値 } x = n \text{ のもとで } P \text{ を実行すると，} \\ \text{停止して戻り値が } S \text{ に属する} \end{array} \right\}
$$

以下の問いに答えよ．

(1) $b(x) = x\%2$ (x を 2 で割ったときの余り)，$f(x) = x/2$ (x を 2 で割ったときの商) としたとき，$\mathrm{wp}(\{0, 1\})$ は何になるか．また，$\mathrm{wp}(\mathbf{N})$ は何か．(導出過程は不要)

(2) $n \in \mathrm{wp}(S)$ かつ $b(n) \neq 0$ ならば $n \in S$ であることを示せ．

(3) $n \in \mathrm{wp}(S)$ かつ $b(n) = 0$ ならば $f(n) \in \mathrm{wp}(S)$ であることを示せ．

(4) 集合 $I \subseteq \mathbf{N}$ が以下の条件を満たすならば，$I \subseteq \mathrm{wp}(S) \cup (\mathbf{N} \setminus \mathrm{wp}(\mathbf{N}))$ が成り立つことを示せ．

- ($n \in I$ かつ $b(n) \neq 0$) ならば $n \in S$
- ($n \in I$ かつ $b(n) = 0$) ならば $f(n) \in I$

(5) $\mathrm{wp}(\mathbf{N})$ が帰納的に可算であることを説明せよ．

(6) $\mathrm{wp}(\mathbf{N})$ が帰納的でないような，帰納的な全域関数 $b(x)$ と $f(x)$ が存在することを説明せよ．

Problem 3

Let $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ denote the set of non-negative integers; x be a variable that ranges over $\mathbf{N}$; $b(x)$ and $f(x)$ be total recursive (i.e. computable) functions from $\mathbf{N}$ to $\mathbf{N}$; and P be the following program.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{while} \quad b(x) = 0 \quad \textbf{do} \quad \{ \\
\quad x := f(x); \\
\} \\
\textbf{return} \quad x;
\end{array}
$$

Given an arbitrary subset $S \subseteq \mathbf{N}$, we define the set $\mathrm{wp}(S) \subseteq \mathbf{N}$ as follows.

$$
\left\{ n \in \mathbf{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{When we execute } P \text{ with } x = n \text{ as the initial value of } x, \\ \text{it terminates and the return value belongs to } S. \end{array} \right\}
$$

Answer the following questions.

(1) Let $b(x) = x\%2$ (the remainder when x is divided by 2) and $f(x) = x/2$ (the quotient when x is divided by 2). Describe $\mathrm{wp}(\{0, 1\})$ and $\mathrm{wp}(\mathbf{N})$. (Derivation is not necessary)

(2) Assume $n \in \mathrm{wp}(S)$ and $b(n) \neq 0$. Prove that $n \in S$.

(3) Assume $n \in \mathrm{wp}(S)$ and $b(n) = 0$. Prove that $f(n) \in \mathrm{wp}(S)$.

(4) Assume that a set $I \subseteq \mathbf{N}$ satisfies the following conditions.

- ($n \in I$ and $b(n) \neq 0$) implies $n \in S$.
- ($n \in I$ and $b(n) = 0$) implies $f(n) \in I$.

Prove that we have $I \subseteq \mathrm{wp}(S) \cup (\mathbf{N} \setminus \mathrm{wp}(\mathbf{N}))$.

(5) Argue that $\mathrm{wp}(\mathbf{N})$ is recursively enumerable.

(6) Argue that, for some total recursive functions $b(x)$ and $f(x)$, the set $\mathrm{wp}(\mathbf{N})$ is not recursive.

問題 4

10^{10} bps を有する物理ネットワーク層を仮定する．物理ネットワーク層は，以下のフォーマットで定義される 1250 バイトの固定長パケットを送受する．DEST，SRC は，それぞれ受信先，送信元のアドレスである．DATA 領域にはアプリケーションプログラムのデータが格納される．CRC は物理ネットワーク層において計算される Cyclic Redundancy Check である．

```
+---------------+-------------+-----------------+--------------+
| DEST (4bytes) | SRC (4bytes) | DATA (1238bytes) | CRC (4bytes) |
+---------------+-------------+-----------------+--------------+
```

本物理ネットワーク層を利用する API が以下のように提供されている．

- void netwrite (void *pckt);
  pckt で示される固定長パケットを送信する．宛先は固定長パケット内の DEST に従う．パケット長をバンド幅で除した時間で送信処理を行い，その後直ちに戻る．
- void netread (void *pckt);
  固定長パケットを受信し，pckt で示されるメモリ領域に格納する．パケット全体が到着すると，直ちに戻る．

物理ネットワーク層の通信は非同期であるとする．また常にエラーなくパケットの送受信がされるとする．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ソフトウェアのオーバヘッドと通信遅延 (1 つの固定長パケットが送信側コンピュータから送信開始されてから受信側コンピュータで受信開始されるまでの遅延) は無視できるほど小さいと仮定して，ユーザレベルにおけるデータ転送スループットの理論最大値を計算せよ．

(2) 次に，通信遅延を 4 μs で，ソフトウェアオーバーヘッドは無視できるとする．

コンピュータ A は netwrite を用いてコンピュータ B に 1 パケットを送信し，即座にコンピュータ B からのパケットを受信するため netread を呼ぶ．コンピュータ B は十分早く netread を呼び出しており，コンピュータ A からのパケットを受信したら，即座に，あらかじめ準備しておいた別の 1 パケットを netwrite を用いてコンピュータ A に送信する．

このとき，コンピュータ A における，netwrite の呼び出しから netread のリターンまでの所要時間を求めよ．なお，他のプロセスや他のコンピュータが通信している可能性は考えないものとする．

(3) 以下のプロトタイプに従い，send 関数を C 言語で書け．本関数は data が指すメモリアドレスから size バイトのデータを netwrite を用いて dest で示される宛先に送信する．ただし最初のパケットでデータ長 size も一緒に送ること．また netwrite の引数には別途 1250 バイトのバッファとして確保されている void*型の大域変数 pcktarea を用いなければならない．

```
void send (NETADDR dest, void *data, int size);
```

自分のアドレスは NETADDR 型の大域変数 myaddr に格納されているとする．また，他のプロセスや他のコンピュータが通信している可能性は考えないものとする．int 型と NETADDR 型は 4 バイト，char 型は 1 バイトとする．

(4) 問い (3) において，送信側コンピュータのメモリコピーのバンド幅が低いと，データ転送スループットが低下することを説明せよ．

Problem 4

Assume a 10^{10} bps physical network layer in which packets in the following fixed-size format, whose size is 1250 bytes, are transferred. `DEST` and `SRC` are receiver and sender addresses, respectively. Application data is stored in the `DATA` area. `CRC`, Cyclic Redundancy Check, is filled by the physical network layer.

```
+---------------+-------------+-----------------+-------------+
| DEST (4bytes) | SRC (4bytes) | DATA (1238bytes) | CRC (4bytes) |
+---------------+-------------+-----------------+-------------+
```

In order to use this physical network layer, the following APIs are defined:

- `void netwrite (void *pckt);`
  It sends the fixed-size packet specified by `pckt`. The destination address is specified by `DEST` field in the fixed-size packet. It takes the time of the packet length divided by the bandwidth to send the packet, and then the function returns immediately.
- `void netread (void *pckt);`
  It receives a fixed-size packet and stores it in the memory area specified by `pckt`. It returns immediately after the whole packet arrives.

Assume that the communication of the physical network layer is asynchronous. The packets are always transferred without error. Answer the following questions.

(1) First, assume that the software overhead and the network delay (the time between the start of sending a fixed-size packet and the start of receiving it) are negligible. Calculate theoretical maximum value of data transfer throughput on the user level.

(2) Next, assume 4 μs for the network delay, and negligible software overhead.

Computer A sends a packet to computer B using `netwrite`, and then immediately calls `netread` to receive a packet from computer B. Computer B has called `netread` early enough, and immediately after receiving the packet from computer A, it sends another packet, which has been already prepared, to computer A using `netwrite`.

Calculate the time from the call of `netwrite` to the return of `netread`, on computer A. Assume that no other processes or no other computers do any communication.

(3) Write a function `send`, which has the prototype below, in C language. This function sends `size` bytes of data from the initial address pointed by `data` to the destination address `dest` by using `netwrite`. The first packet should contain the data size given by `size` as well. The argument of `netwrite` must be `pcktarea`, which is a global variable of `void*` type and given as 1250-byte buffer area.

```
void send (NETADDR dest, void *data, int size);
```

The address of the sender computer is stored in a global variable `myaddr`, which is `NETADDR` type. Assume that no other processes or no other computers do any communication. The sizes of `int` and `NETADDR` are 4 bytes, and the size of `char` is 1 byte.

(4) Argue that the throughput of the data transfer in question (3) is degraded if the memory copy bandwidth of the sender computer is low.