平成24年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成23年8月23日

10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take this problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Write your examinee's number in the box below.

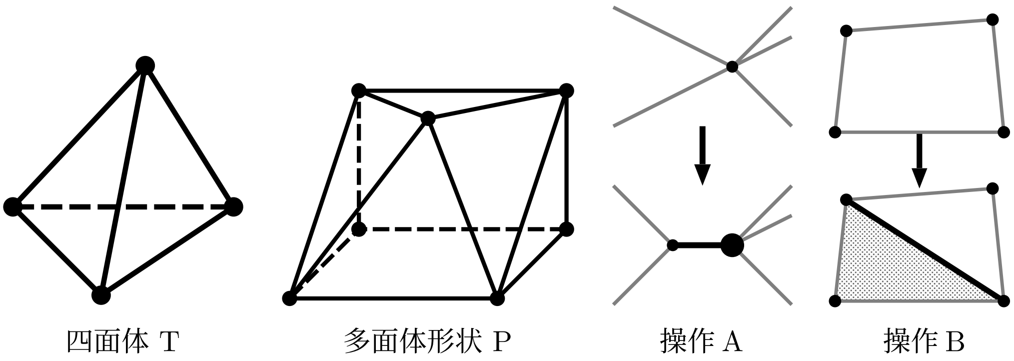
受験番号	No.

問題 1

下図に示すように，四面体 T に 2 種類の操作

操作 A　新たに頂点と稜線を加える
操作 B　新たに稜線と面を加える

を適用して多面体形状 P に変換することを考える．なお，変換中に頂点の移動は自由にできるとして，操作にはカウントしない．以下の問いに答えよ．



(1) 多面体形状 P の頂点数 v，稜線数 e，面数 f をそれぞれ求め，式

$$v - e + f = 2 \qquad [1]$$

が満たされていることを示せ．

(2) 四面体 T から多面体形状 P を作成する際の，操作 A の適用回数 a，操作 B の適用回数 b を求めよ．

(3) 四面体に操作 A を a 回，操作 B を b 回施して，頂点数 v，稜線数 e，面数 f の多面体形状を作成する．このとき，以下の方程式を満たすような 3×2 の行列 $\boldsymbol{M}$ を求めよ．

$$\begin{pmatrix} v \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

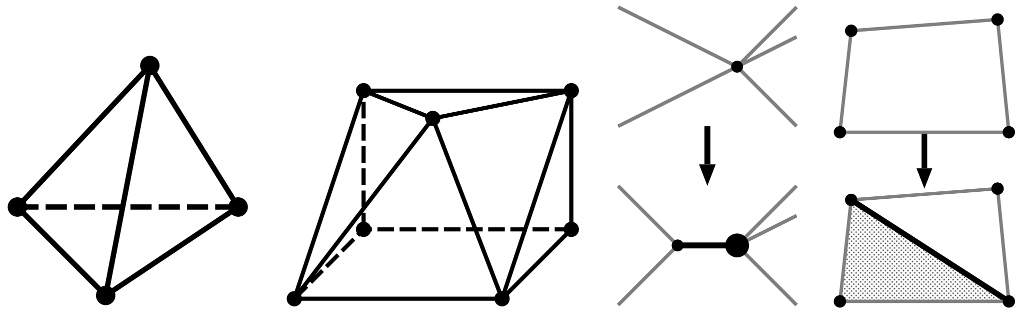
(4) 四面体に上に掲げた 2 種類の操作を適用することで，式 [1] を満たす多面体立体の頂点数 v，稜線数 e，面数 f のすべての可能な組合わせ（ただし $f \geq 4$ とする）を実現できることを示せ．

Problem 1

Consider a transformation from the tetrahedron T to the polyhedron P by applying a sequence of two operations:

Operation A: adds an edge and a vertex.
Operation B: adds an edge and a face.

as illustrated in the following figure. Note that positions of vertices can be freely changed during the transformation and should not be counted as operations. Answer the following questions.



Tetrahedron T   Polyhedron P   Operation A   Operation B

(1) Count the number of the vertices v, the number of the edges e, and the number of the faces f of the polyhedron P. Show that they satisfy

$$v - e + f = 2. \qquad [1]$$

(2) Determine a and b, which are the numbers of applications of Operations A and B, respectively, to transform the tetrahedron T to the polyhedron P.

(3) Let us consider a transformation from a tetrahedron to a polyhedron having v vertices, e edges and f faces, using a applications of Operation A and b applications of Operation B. Determine $\boldsymbol{M}$, a 3×2 matrix satisfying the following equations.

$$\begin{pmatrix} v \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(4) Show that all possible combinations of the number of the vertices v, the number of the edges e, and the number of the faces f of a polyhedron that satisfy Eq. [1] (with restriction of $f \geq 4$) can be composed from a tetrahedron by applying the above two operations only.

問題 2

n 個の実数からなる数列 $A[1..n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を考える．ただし $n \geq 2$ とする．このとき，A の部分数列 $A[i..j] = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ 中の最大値を $MAX(i, j)$ と表す．

以下の問いに答えよ．

(1) $1 \leq i \leq n-1$ を満たすすべての整数 i に対する $MAX(i, i+1)$ の値を計算する $O(n)$ 時間のアルゴリズム (I) を示せ．また $1 \leq i \leq n - n/2 + 1$ を満たすすべての整数 i に対する $MAX(i, i + n/2 - 1)$ の値を計算する $O(n^2)$ 時間のアルゴリズム (II) を示せ．

(2) r を $1 \leq r \leq n/2$ を満たす整数であるとする．$1 \leq i \leq n - r + 1$ を満たすすべての i に対し $MAX(i, i + r - 1)$ の値をすでに計算し，それらの値を保持しているとする．このとき，$1 \leq \ell \leq m \leq n$ および $r \leq m - \ell < 2r$ を満たす任意の整数の組 ℓ, m に対し，$MAX(\ell, m)$ を $O(1)$ 時間で計算するアルゴリズムを示せ．

(3) $1 \leq i \leq n - 2^k + 1$, $k \geq 0$ を満たす整数の組 i, k に対し，$MAX(i, i + 2^k - 1)$ の値をすでに計算し，それらの値をテーブル T に保持しているとする．このとき，$1 \leq i \leq j \leq n$ を満たす任意の整数の組 i, j に対し，$MAX(i, j)$ を T を用いて $O(1)$ 時間で計算するアルゴリズムを示せ．

(4) 問い (3) で述べたテーブル T を求めるアルゴリズムを示し，その時間計算量を示せ．

(5) 数列 $A[1..n]$ 上で，$1 \leq i \leq j \leq n$ を満たす任意の i, j に対し $MAX(i, j)$ を $O(\log n)$ 時間で求めることを可能とするような，数列 $A[1..n]$ に対する $O(n)$ 時間の前処理アルゴリズムを示せ．

Problem 2

Consider a sequence $A[1..n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ of n real numbers, where $n \geq 2$. Let $MAX(i, j)$ denote the maximum number in the subsequence $A[i..j] = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j)$ of A.

Answer the following questions.

(1) Show an $O(n)$-time algorithm (I) that calculates $MAX(i, i+1)$ for all integers i such that $1 \leq i \leq n-1$. Also show an $O(n^2)$-time algorithm (II) that calculates $MAX(i, i+n/2-1)$ for all integers i such that $1 \leq i \leq n - n/2 + 1$.

(2) Let r be an integer that satisfies $1 \leq r \leq n/2$. Assume that we have calculated and stored all the $MAX(i, i+r-1)$ values for all integers i such that $1 \leq i \leq n-r+1$. Show an $O(1)$-time algorithm that calculates $MAX(\ell, m)$ for any pair of integers ℓ, m that satisfies $1 \leq \ell \leq m \leq n$ and $r \leq m - \ell < 2r$.

(3) Assume that we have calculated and stored all the $MAX(i, i+2^k-1)$ values in table T for all pairs of integers i, k that satisfy $1 \leq i \leq n - 2^k + 1$ and $k \geq 0$. Show an $O(1)$-time algorithm that calculates $MAX(i, j)$ for any pair of integers i, j that satisfies $1 \leq i \leq j \leq n$, using T.

(4) Show an algorithm that computes the table T in question (3). Show also the computational time complexity of the algorithm.

(5) Show an $O(n)$-time preprocessing algorithm for the sequence $A[1..n]$ that enables $O(\log n)$-time computation of $MAX(i, j)$ on the sequence $A[1..n]$ for any pair of integers i, j that satisfies $1 \leq i \leq j \leq n$.

問題 3

Σ を有限アルファベットとする．言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して，二項関係 R_L を次のように定義する．

すべての $z \in \Sigma^*$ に対して $xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L$ となるとき，xR_Ly と定義する．ここで $x, y \in \Sigma^*$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) R_L が右不変な同値関係であること，すなわち次の 4 つの命題が成立することを証明せよ．

(a) 任意の $x \in \Sigma^*$ に対して，xR_Lx.

(b) 任意の $x, y \in \Sigma^*$ に対して，xR_Ly ならば yR_Lx.

(c) 任意の $x, y, z \in \Sigma^*$ に対して，xR_Ly かつ yR_Lz ならば xR_Lz.

(d) xR_Ly ならば，任意の $z \in \Sigma^*$ に対して xzR_Lyz.

(2) R_L の同値類の個数が有限であるような L を考える．このとき，以下によって決定性有限オートマトン $M_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_0^L, F_L)$ を定義する．ここで Q_L は状態の集合，δ_L は状態遷移関数，q_0^L は初期状態，F_L は受理状態の集合である．また $[x]_L$ は，記号列 $x \in \Sigma^*$ の属する R_L の同値類を表す.

- $Q_L = \{\, [x]_L \mid x \in \Sigma^* \,\}$.
- $\delta_L\big([x]_L,\, a\big) = [xa]_L$．ただし $x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.
- $q_0^L = [\varepsilon]_L$.
- $F_L = \{\, [x]_L \mid x \in L \,\}$.

(a) 上の遷移関数 δ_L が well-defined であること，すなわち，$[x]_L$ の代表元 x の選び方によらないことを証明せよ．

(b) 言語 L がオートマトン M_L によって受理されることを証明せよ．

(3) L が正則言語ならば R_L の同値類の個数は有限であることを証明せよ．

Problem 3

Let Σ be a finite alphabet. For a language $L \subseteq \Sigma^*$, we define a binary relation R_L as follows.

For $x, y \in \Sigma^*$, we define xR_Ly if $xz \in L \iff yz \in L$ for all $z \in \Sigma^*$.

Answer the following questions.

(1) Prove that R_L is a right-invariant equivalence relation, that is, the following four statements hold.

(a) For any $x \in \Sigma^*$, xR_Lx.

(b) For any $x, y \in \Sigma^*$, if xR_Ly, then yR_Lx.

(c) For any $x, y, z \in \Sigma^*$, if xR_Ly and yR_Lz, then xR_Lz.

(d) If xR_Ly, then xzR_Lyz for any $z \in \Sigma^*$.

(2) Let L be so that the number of the equivalence classes of R_L is finite. We define a deterministic finite automaton $M_L = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_0^L, F_L)$ by the following. Here Q_L is the set of states, δ_L is the state transition function, q_0^L is the initial state, and F_L is the set of accepting states. $[x]_L$ denotes the equivalence class of R_L containing $x \in \Sigma^*$.

- $Q_L = \{\, [x]_L \mid x \in \Sigma^* \,\}$.
- $\delta_L\big(\, [x]_L,\, a \,\big) = [xa]_L$, where $x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.
- $q_0^L = [\varepsilon]_L$.
- $F_L = \{\, [x]_L \mid x \in L \,\}$.

(a) Prove that the above transition function δ_L is well-defined, that is, it does not depend on the choice of a representative x of $[x]_L$.

(b) Prove that the language L is accepted by the automaton M_L.

(3) Prove that, if L is a regular language, then the number of the equivalence classes of R_L is finite.

問題 4

2 つの n ビット符号なし整数の加算を行うハードウェアを考える．入力を A, B とし，それぞれの第 i ビット $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ を A_i, B_i と書く．和は $n+1$ ビット整数 S とし，第 i ビット $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を S_i と書く．すなわち

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i A_i, \qquad B = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i B_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n} 2^i S_i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (A_i + B_i)$$

である．以下の問いに答えよ．

なお，問い (3), (4), (5) においては，論理回路は AND, OR, NOT, XOR ゲートを用いて設計するものとし，導出の説明なしに回路図のみ示せ．

(1) 以下の符号なし 2 進数の加算を実行せよ．

$$0011000110100111 + 0110011001011010 \qquad [1]$$

(2) $0 \le i \le j \le n-1$ を満たす整数の組 i, j に対して，部分和 $S_{i,j}$ を以下のように定義する．

$$S_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} 2^k (A_k + B_k)$$

また，キャリー伝搬シグナル $P_{i,j}$ とキャリー生成シグナル $G_{i,j}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= \begin{cases} 1 & \text{if } S_{i,j} = 2^{j+1} - 2^i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ G_{i,j} &= \begin{cases} 1 & \text{if } S_{i,j} \ge 2^{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

式 [1] の加算における $P_{0,1}$, $G_{0,1}$, $P_{2,3}$, $G_{2,3}$, $P_{0,3}$, $G_{0,3}$ を求めよ．

(3) i は $0 \le i \le n-1$ を満たす整数であるとする．A_i, B_i を入力として $P_{i,i}$, $G_{i,i}$ を出力する論理回路を示せ．

(4) i, j, k は $0 \le i < j \le k \le n-1$ を満たす整数であるとする．$P_{i,j-1}$, $G_{i,j-1}$, $P_{j,k}$, $G_{j,k}$ を入力として，$P_{i,k}$ と $G_{i,k}$ を出力する論理回路を示せ．

(5) i は $1 \le i \le n-1$ を満たす整数であるとする．$G_{0,i-1}$, A_i, B_i を入力として，S_i を出力する論理回路を示せ．

(6) 問い (3), (4), (5) で設計した論理回路を用いて，2 つの n ビット符号なし整数の加算を行う論理回路の構成方法を論じよ．ただし，ファン・インがある定数以下の論理ゲートのみを用いて，論理ゲートの段数が $O(\log n)$，論理ゲートの個数が $O(n)$ となるようにせよ．

Problem 4

Consider a combinatorial logic that computes addition of two n-bit unsigned integers. Let A and B be the inputs, and A_i and B_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ be their ith bit, respectively. Let S be the $n+1$-bit sum and S_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ be the ith bit. That is,

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i A_i, \qquad B = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i B_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n} 2^i S_i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (A_i + B_i).$$

Answer the following questions.

In questions (3), (4) and (5), use AND, OR, NOT, XOR gates to design logic circuits, and draw circuit diagrams without explaining the derivation.

(1) Conduct the following addition of unsigned binary integers.

$$0011000110100111 + 0110011001011010 \qquad [1]$$

(2) For each pair of integers i, j such that $0 \le i \le j \le n-1$, let $S_{i,j}$ be the partial sum

$$S_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} 2^k (A_k + B_k),$$

and $P_{i,j}$ and $G_{i,j}$ be the carry propagator and the carry generator, respectively, defined as follows.

$$P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } S_{i,j} = 2^{j+1} - 2^i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$G_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } S_{i,j} \ge 2^{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate $P_{0,1}$, $G_{0,1}$, $P_{2,3}$, $G_{2,3}$, $P_{0,3}$ and $G_{0,3}$ in the addition [1].

(3) Given an integer i such that $0 \le i \le n-1$, show a logic circuit that outputs $P_{i,i}$ and $G_{i,i}$ from the inputs A_i and B_i.

(4) Given a 3-tuple i, j, k of integers such that $0 \le i < j \le k \le n-1$, show a logic circuit that outputs $P_{i,k}$ and $G_{i,k}$ from the inputs $P_{i,j-1}$, $G_{i,j-1}$, $P_{j,k}$ and $G_{j,k}$.

(5) Given an integer i such that $1 \le i \le n-1$, show a logic circuit that outputs S_i from the inputs $G_{0,i-1}$, A_i and B_i.

(6) Discuss how to design a logic circuit that computes addition of two n-bit unsigned integers, using logic circuits designed in questions (3), (4) and (5). Here, the logic circuit should consist of logic gates with fan-in bounded by a constant, the gate level should be $O(\log n)$, and the number of gates should be $O(n)$.