平成23年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

数学

平成23年2月1日

10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 2 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 2 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take this problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

問題 1

関数 f_i $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ は定義域が実区間 D_X の関数とする．実数 a_i $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = 0 \quad (\forall x \in D_X) \qquad \Rightarrow \qquad a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つとき，関数の集合 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ は一次独立であるという．

高々 n 次の多項式の作るベクトル空間を V_n と表す．また V_n における内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

で，ノルムを $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 以下の集合がそれぞれ V_2 の基底か否か答えよ．理由も簡潔に述べよ．

$$\begin{aligned} G_1 &= \{1, x, x^2\} \\ G_2 &= \{0, 1, x, x^2\} \\ G_3 &= \{x^2+1, x^2-x, x+1\} \\ G_4 &= \{x^2+1, x^2-x, x+2\} \end{aligned}$$

(2) $f, g \in V_n$ および $\langle f, f \rangle = 1$ とする．このとき

$$h(x) = g(x) - \langle f, g \rangle f(x)$$

とおくと，$\langle f, h \rangle = 0$ となることを示せ．

(3) V_2 の正規直交基底をひとつ与えよ．

Problem 1

Let f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ be functions whose domains are a real interval D_X. If

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = 0 \quad (\forall x \in D_X) \qquad \Rightarrow \qquad a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

for real numbers a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, then the set of functions $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ is said to be linearly independent.

Let V_n be the vector space consisting of nth or less degree polynomials. Define an inner product in V_n as

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

and a norm as $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Answer the following questions.

(1) Answer whether each of the following sets is a basis of V_2 or not. Explain the reasons briefly.

$$\begin{aligned} G_1 &= \{1, x, x^2\}, \\ G_2 &= \{0, 1, x, x^2\}, \\ G_3 &= \{x^2 + 1, x^2 - x, x + 1\}, \\ G_4 &= \{x^2 + 1, x^2 - x, x + 2\}. \end{aligned}$$

(2) Let $f, g \in V_n$ and $\langle f, f \rangle = 1$. Define $h(x)$ as

$$h(x) = g(x) - \langle f, g \rangle f(x).$$

Prove that $\langle f, h \rangle = 0$.

(3) Give an orthonormal basis of V_2.

問題 2

ある工場で生産される製品を考える．ひとつの製品を選んだとき，この製品が正常である事象を $X = 0$ とし，不良である事象を $X = 1$ とする．不良品である確率を $P(X = 1) = \theta$ $(0 < \theta < 1)$ とし，この確率は各製品で互いに独立であるとする．

以下の問いに答えよ．

(1) X の期待値および分散を求めよ．

(2) 任意に選んだ M 個の製品のうち，m 個が不良品である確率を求めよ．

(3) N 個の製品を任意に選び，そのうち i 番目の製品が不良である事象を $X_i = 1$ とする．特定の $X_1, X_2, \ldots, X_N$ の観測値に対する同時確率 $f(X_1, X_2, \ldots, X_N, \theta)$ を，θ の関数と見たとき，この関数 $L(\theta)$ を尤度関数と呼ぶ．

任意に選んだ N 個の製品のうち，n 個が不良品であった．その観測値に対する尤度関数 $L(\theta)$ を求めよ．また，尤度関数を最大化する θ を求めよ．

(4) 品質検査において，各製品を正常であると診断する事象を $Y = 0$, 不良であると診断する事象を $Y = 1$ とする．検査の偽陽性率および偽陰性率がそれぞれ

$$
\begin{aligned}
P(Y = 1 \mid X = 0) &= \alpha \\
P(Y = 0 \mid X = 1) &= \beta
\end{aligned}
$$

$(0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1)$ であるとき，$P(X = 1 \mid Y = 1)$ を求めよ．

Problem 2

Consider products manufactured in a factory. When a product is chosen, let $X = 0$ represent the event that the product is normal, and let $X = 1$ represent the event that the product is defective. Let θ be the probability of a product being defective, that is, $P(X = 1) = \theta$ $(0 < \theta < 1)$. Assume also that such probabilities are mutually independent for all products.

Answer the following questions.

(1) Calculate the mean and the variance of X.

(2) Calculate the probability that m products out of a set of M randomly chosen products are defective.

(3) Choose N products randomly, and let $X_i = 1$ represent the event that the ith product is defective. If we see the joint probability function $f(X_1, X_2, \ldots, X_N, \theta)$ for given observations of X_1, X_2, …, X_N as a function of θ, then this function, $L(\theta)$, is called the likelihood function.

Assume that n products out of a set of N randomly chosen products are defective. Calculate the likelihood function $L(\theta)$ for these observations. Also, calculate the value θ that maximizes the likelihood function.

(4) In a quality inspection of a product, let $Y = 0$ represent the event that the product is evaluated as normal, and let $Y = 1$ represent the event that the product is evaluated as defective. Let the probabilities of false positive and false negative be:

$$\begin{aligned} P(Y = 1 \mid X = 0) &= \alpha, \\ P(Y = 0 \mid X = 1) &= \beta \end{aligned}$$

where $0 < \alpha < 1$ and $0 < \beta < 1$. Calculate $P(X = 1 \mid Y = 1)$.

平成23年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成23年2月2日

10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

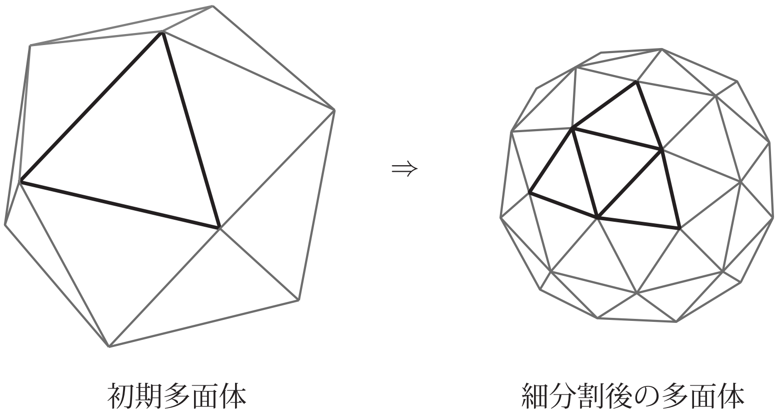
(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take this problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Write your examinee’s number in the box below.

受験番号	No.

問題 1

細分割曲面は，与えられた初期多面体の面を細かい面に再帰的に分割するとともに，頂点（初期多面体の頂点および新しく生成された頂点）を適切な位置に移動させることで，曲面形状を近似的に表現する．いま，与えられている多面体の面がすべて三角形であるとし，下図のように，一回の細分割操作において 1 つの三角形を 4 つの小さな三角形に分割する．このとき，初期多面体の頂点数，稜線数，面数を v_0, e_0, f_0，n 回細分割操作をしたあとの頂点数，稜線数，面数を v_n, e_n, f_n とおく．以下の問いに答えよ．



(1) v_n, e_n, f_n のそれぞれを，v_{n-1}, e_{n-1}, f_{n-1} を用いて表せ．

(2) n がいかなる正の整数でも，

$$v_n - e_n + f_n = v_0 - e_0 + f_0$$

が満たされていることを示せ．

(3) v_n, e_n, f_n のそれぞれを，v_0, e_0, f_0, n を用いて表せ．

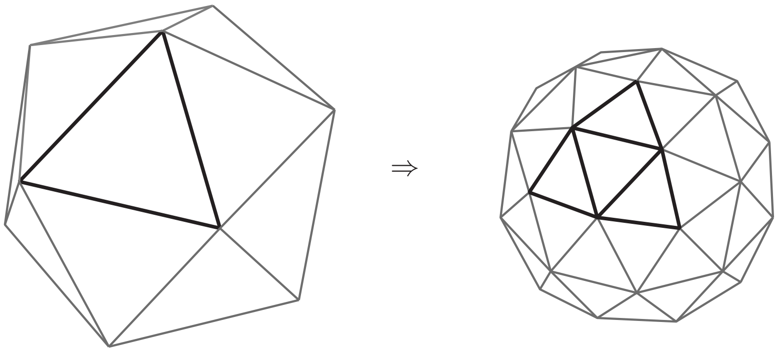
(4) 以下の 2 つの極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{f_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{f_n}$$

が，v_0, e_0, f_0 によらず一定値になることを示せ．ただし $f_0 > 0$ とする．

Problem 1

A subdivision surface approximates the shape of a smooth surface by recursively subdividing the faces of an initial polyhedron, where the positions of the vertices (both initial and newly generated) are appropriately translated. Assume that all the faces of the initial polyhedron are triangles, and assume that each subdivision operation divides every triangle into four triangles as shown in the following figure. Let v_0, e_0 and f_0 be the numbers of the vertices, edges, and faces of the initial polyhedron, respectively, and let v_n, e_n, and f_n be the numbers of the vertices, edges, and faces after n subdivision operations are performed, respectively. Answer the following questions.



Initial polyhedron $\Rightarrow$ Subdivided polyhedron

(1) Represent each of v_n, e_n and f_n in terms of v_{n-1}, e_{n-1} and f_{n-1}.

(2) Show that it holds

$$v_n - e_n + f_n = v_0 - e_0 + f_0$$

for any positive integer n.

(3) Represent each of v_n, e_n and f_n in terms of v_0, e_0, f_0 and n.

(4) Assume $f_0 > 0$. Show that the following limits are constant independent of v_0, e_0 and f_0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{f_n}, \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{f_n}.$$

問題 2

Σ を有限アルファベットとし，$L \subseteq \Sigma^*$ を Σ 上の正則言語とする．L を受理する決定性有限オートマトンを $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とする．ここで Q は状態の有限集合，$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ は状態遷移関数，q_0 は初期状態，F は受理状態の集合である．$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ を次のように帰納的に定義する．

(i) $\delta^*(q, \varepsilon) = q$. ($q \in Q$, ε は空記号列を表す．)

(ii) $\delta^*(q, xa) = \delta(\delta^*(q, x), a)$. ($q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.)

このとき以下の問いに答えよ.

(1) 状態 $p, q \in Q$ に対して次のように定義される言語 $I(p)$, $J(p, q)$, $K(q)$ は正則であることを示せ.

(a) $I(p) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = p\}$

(b) $J(p, q) = \{y \in \Sigma^* \mid \delta^*(p, y) = q\}$

(c) $K(q) = \{z \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, z) \in F\}$

(2) 次の言語 $D(L)$ は正則であることを証明せよ.

$$D(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ある } x, y, z \in \Sigma^* \text{ が存在して } w = zyx \text{ かつ } xyz \in L \text{ となる } \}$$

Problem 2

Let Σ be a finite alphabet and let $L \subseteq \Sigma^*$ be a regular language over Σ. Let $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be a deterministic finite automaton accepting L, where Q is the finite set of states, $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ is the state transition function, q_0 is the initial state, and F is the set of accepting states. We define $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ inductively as follows:

(i) $\delta^*(q, \varepsilon) = q$. ($q \in Q$, ε is the empty string.)

(ii) $\delta^*(q, xa) = \delta(\delta^*(q, x), a)$. ($q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.)

Answer the following questions.

(1) Prove that the following languages $I(p)$, $J(p, q)$, and $K(q)$ are regular for states $p, q \in Q$.

(a) $I(p) = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = p\}$

(b) $J(p, q) = \{y \in \Sigma^* \mid \delta^*(p, y) = q\}$

(c) $K(q) = \{z \in \Sigma^* \mid \delta^*(q, z) \in F\}$

(2) Prove that the following language $D(L)$ is regular:

$$D(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ there exist } x, y, z \in \Sigma^* \text{ such that } w = zyx \text{ and } xyz \in L \ \}.$$

問題 3

int 型の要素を持つ大きさ 10 の配列 a に対し，その要素を昇順に並べ替える Java プログラムの一部（以下，プログラム 1 と呼ぶ）を以下に示す.

```
int[] a = {(要素の並び)};
        // 「(要素の並び)」には，10 個の具体的な整数が，たとえば
        // int[] a = {2, 5, 8, 6, 3, 8, 1, 0, 2, 9};
        // のように書かれているものとする.
int x = 0;

for (int i = 0; i < 9; i++) {
  for (int j = 0; j < 9 - i; j++) {
    if (a[j] > a[j + 1]) {
      x = a[j];
      a[j] = a[j + 1];
      a[j + 1] = x;
    }
  }
}
```

以下の問いに答えよ.

(1) 外側の for ループにおいて，i の値が i_0 のときに，ループ内の手続きを完了した直後には，各 $k = 0, 1, \ldots, 9 - i_0$ に対し，$\texttt{a}[9 - i_0] \geq \texttt{a}[k]$ となる理由を説明せよ.

(2) 外側の for ループにおいて，i の値が i_0 のときに，ループ内の手続きを完了した直後の $\texttt{a}[9 - i_0]$ の値は，プログラム 1 の実行が終了するまで変わらないことの理由を説明せよ.

(3) プログラム 1 の実行が終了すると，配列 a の要素が昇順に並んでいる，すなわち，各 $k = 0, 1, \ldots, 8$ に対して $\texttt{a}[k] \leq \texttt{a}[k + 1]$ となっている理由を説明せよ.

Problem 3

The following is a part of Java program that sorts the elements of an array `a` into the ascending order. Here, the array `a` has 10 elements in `int` type. The following program is referred to as program1.

```
int[] a = {(list of elements)};
        // (list of elements) is a list of 10 literal integers, for example:
        // int[] a = {2, 5, 8, 6, 3, 8, 1, 0, 2, 9};
int x = 0;

for (int i = 0; i < 9; i++) {
  for (int j = 0; j < 9 - i; j++) {
    if (a[j] > a[j + 1]) {
      x = a[j];
      a[j] = a[j + 1];
      a[j + 1] = x;
    }
  }
}
```

Answer the following questions.

(1) Assume that the outer `for` loop with $\mathtt{i} = i_0$ is just finished. Explain why $\mathtt{a}[9 - i_0] \geq \mathtt{a}[k]$ holds for $k = 0, 1, \ldots, 9 - i_0$.

(2) Assume that the outer `for` loop with $\mathtt{i} = i_0$ is just finished. Explain why $\mathtt{a}[9 - i_0]$ will not be changed until the end of the execution of program1.

(3) Explain why the elements of the array `a` is in the ascending order, that is, $\mathtt{a}[k] \leq \mathtt{a}[k + 1]$ holds for $k = 0, 1, \ldots, 8$, when the execution of program1 is finished.

平成23年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 II

平成23年2月2日
13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the problem booklet or any answer sheet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Write your examinee's number in the box below.

受験番号	No.

問題 1

a_0 に 1 次収束する数列 $t_k = a_0 + \lambda^k a_1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を考える．ただし λ は $0 < \lambda < 1$ を満たす定数とする．

以下の問いに答えよ．

(1) λ は既知として，t_k と t_{k-1} ($k \geq 1$ とする) から a_1 を消去し，a_0 を求める式を与えよ．この式を

$$a_0 = T_1(t_k, t_{k-1}) \qquad [1]$$

とする．

(2) λ は未知として，t_k, t_{k-1}, t_{k-2} ($k \geq 2$ とする) から λ と a_1 を消去し，a_0 を求める式を与えよ．この式を

$$a_0 = T_2(t_k, t_{k-1}, t_{k-2}) \qquad [2]$$

とする．

(3) 式 [1] と式 [2] における丸め誤差を考える．簡単のため，$k \geq 2$ を固定し，t_k にのみ丸め誤差 ε が入って

$$\tilde{t}_k = a_0 + \lambda^k a_1 + \varepsilon$$

となっているとする．また，$\theta = 1 - \lambda$ および $\delta = \lambda^k a_1$ とおく．誤差

$$E_1 = T_1(\tilde{t}_k, t_{k-1}) - a_0, \qquad E_2 = T_2(\tilde{t}_k, t_{k-1}, t_{k-2}) - a_0$$

を θ, δ, ε で表せ．

(4) $\theta = 1/2$ とする．$|\varepsilon| << |\delta|$ のとき，$|E_1| < |E_2|$ となることを示せ．

(5) $|\varepsilon| = |\delta|$ とする．$\theta << 1$ のとき，$|E_1|$ と $|E_2|$ を比較せよ．

Problem 1

Consider a sequence $t_k = a_0 + \lambda^k a_1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), which linearly converges to a_0. Here λ is a constant such that $0 < \lambda < 1$.

Answer the following questions.

(1) Assume that the constant λ is known. Eliminate a_1 from t_k and t_{k-1}, and derive an expression that gives a_0 for $k \geq 1$. Let the derived expression be

$$a_0 = T_1(t_k, t_{k-1}). \qquad [1]$$

(2) Assume that the constant λ is unknown. Eliminate λ and a_1 from t_k, t_{k-1}, and t_{k-2}, and derive an expression that gives a_0 for $k \geq 2$. Let the derived expression be

$$a_0 = T_2(t_k, t_{k-1}, t_{k-2}). \qquad [2]$$

(3) Consider round-off errors in the computations of the expressions [1] and [2]. For simplicity, fix $k \geq 2$, and assume a round-off error ε in t_k as

$$\tilde{t}_k = a_0 + \lambda^k a_1 + \varepsilon.$$

Let $\theta = 1 - \lambda$ and $\delta = \lambda^k a_1$. Represent the errors

$$E_1 = T_1(\tilde{t}_k, t_{k-1}) - a_0, \qquad E_2 = T_2(\tilde{t}_k, t_{k-1}, t_{k-2}) - a_0$$

in terms of θ, δ and ε.

(4) Let $\theta = 1/2$. Show that $|E_1| < |E_2|$ for $|\varepsilon| << |\delta|$.

(5) Let $|\varepsilon| = |\delta|$. Compare $|E_1|$ and $|E_2|$ for $\theta << 1$.

問題 2

Σ を有限アルファベットとし，文字に全順序が定義されているとする．\$ は Σ に含まれない文字とし，$\$ > \max \Sigma$ とする．

$S = s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \in \Sigma^n$ $(n > 0)$ とする．S の最後に \$ を加えたものを，右に i 回巡回シフトしたものを第 i 要素として縦にならべたベクトルを X とする．

$$X = \begin{pmatrix} s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1}\$ \\ \$ s_0 s_1 \cdots s_{n-2} s_{n-1} \\ \cdots \\ s_2 s_3 s_4 \cdots s_0 s_1 \\ s_1 s_2 s_3 \cdots \$ s_0 \end{pmatrix}$$

X の要素を辞書順の昇順にソートして上から並べたベクトルを M とし，M の各要素の j 番目の文字を取り出して並べたベクトルを M_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ とする．例えば $S = \texttt{ba}$ で $\texttt{a} < \texttt{b} < \$$ のとき

$$X = \begin{pmatrix} \texttt{ba\$} \\ \texttt{\$ba} \\ \texttt{a\$b} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \texttt{a\$b} \\ \texttt{ba\$} \\ \texttt{\$ba} \end{pmatrix} \qquad M_0 = \begin{pmatrix} \texttt{a} \\ \texttt{b} \\ \$ \end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} \$ \\ \texttt{a} \\ \texttt{b} \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \texttt{b} \\ \$ \\ \texttt{a} \end{pmatrix}$$

となる．

以下の問いに答えよ．なお計算量の解析においてはアルファベット Σ に含まれる文字の数は定数とみなせ．

(1) 文字列 $S = \texttt{tgagtgt}$ に対して M_7 を求めよ．ただし順序は $\texttt{a} < \texttt{g} < \texttt{t} < \$$ とする．

(2) M_n だけがわかっているときに，M_n から M_0 を求めるアルゴリズムを示せ．その時間計算量はいくらか．

(3) M_n と M_0 だけがわかっているときに，M_n と M_0 とから M_1 を求めるアルゴリズムを示せ．その時間計算量はいくらか．

(4) M_n だけがわかっているときに，M_n から S を求めるアルゴリズムを示せ．その時間計算量はいくらか．

Problem 2

Let Σ be a finite alphabet with a total order. Let \$ be a symbol not in Σ, and let $\$ > \max \Sigma$.

Let $S = s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \in \Sigma^n$ $(n > 0)$. Let X be the vector of strings whose ith element is the string defined as follows: \$ is appended to S, and the resulting string is circularly shifted right i times:

$$X = \begin{pmatrix} s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1}\$ \\ \$ s_0 s_1 \cdots s_{n-2} s_{n-1} \\ \cdots \\ s_2 s_3 s_4 \cdots s_0 s_1 \\ s_1 s_2 s_3 \cdots \$ s_0 \end{pmatrix}.$$

Sort the elements of X in the ascending lexicographic order. Let the resulting vector be M, and let M_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ be the vector whose ith element is the jth symbol of the ith string of M. For example, if $S = \texttt{ba}$ and $\texttt{a} < \texttt{b} < \$$ then

$$X = \begin{pmatrix} \texttt{ba\$} \\ \texttt{\$ba} \\ \texttt{a\$b} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \texttt{a\$b} \\ \texttt{ba\$} \\ \texttt{\$ba} \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} \texttt{a} \\ \texttt{b} \\ \$ \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \$ \\ \texttt{a} \\ \texttt{b} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \texttt{b} \\ \$ \\ \texttt{a} \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions. In the analysis of the computational complexity, consider that the number of symbols of the alphabet Σ is a constant.

(1) Find M_7 for the string $S = \texttt{tgagtgt}$. The order is $\texttt{a} < \texttt{g} < \texttt{t} < \$$.

(2) Assume that only M_n is known. Show an algorithm that computes M_0 from M_n. What is the time complexity of that algorithm?

(3) Assume that only M_n and M_0 are known. Show an algorithm that computes M_1 from M_n and M_0. What is the time complexity of that algorithm?

(4) Assume that only M_n is known. Show an algorithm that computes S from M_n. What is the time complexity of that algorithm?

問題 3

次のような命令セットを持つ単純スタック型仮想計算機を定義する．データ型は符号付き 16 ビット整数値のみとする．各命令は 1 バイトで表現され，付随する即値またはアドレスは 2 バイトで表現される．

PUSH_CNST $< integer >$	$< integer >$ をスタックに積む．
DUP	スタックのトップの値をコピーしてスタックに積む．
LD $< address >$	$< address >$ で示されるメモリに格納されている整数値をスタックに積む．
ST $< address >$	スタックのトップの内容を取り除き，$< address >$ で示されるメモリに格納する．
ADD	スタックのトップと次の内容をスタックから取り除き，2 つを加算した結果をスタックに積む．
JMP_POS $< address >$	スタックのトップの内容を取り除き，その値が正ならば $< address >$ で示される番地から機械語を実行する．
JMP $< address >$	$< address >$ で示される番地から機械語を実行する．
STOP	実行を停止する．

以下の問いに答えよ．

(1) 以下のプログラムを実行したとき，スタックのトップの値および 1000 番地に格納されている整数値を示せ．なお，各行先頭の数字は当該命令が格納されているメモリアドレスである．

```
00: PUSH_CNST 0
03: ST        1000
06: PUSH_CNST 10
09: DUP
10: LD        1000
13: ADD
```

```
14: ST        1000
17: PUSH_CNST -1
20: ADD
21: DUP
22: JMP_POS   09
25: STOP
```

(2) サブルーチン呼び出しができるように，本スタック型計算機を拡張したい．再帰的な呼び出しと局所変数が扱えるように，フレームスタックを導入し，フレームの構造を説明せよ．また，サブルーチン呼び出しおよびフレーム内データへのアクセスのための命令を定義し，それらの命令の意味を説明せよ．

(3) 拡張したスタック型仮想計算機で，以下のサブルーチンをコンパイルせよ．

```
int fib (int n)
{
   if (n > 2) return fib (n - 1) + fib (n - 2);
   return 1
}
```

(4) Java などのプログラミング言語システムが想定している仮想計算機はスタック型アーキテクチャである．一方，現在主流の計算機アーキテクチャはレジスタ型アーキテクチャである．プログラミング言語システムの仮想計算機として，スタック型アーキテクチャが，レジスタ型アーキテクチャより優れている点，劣っている点を述べよ．

Problem 3

The following is a definition of an instruction set of a simple stack virtual machine. Assume signed 16bit integer as the only data type. Each instruction is represented by a 1byte word, possibly followed by a 2byte data representing an immediate value or an address.

PUSH_CNST $< \mathit{integer} >$	Push $< \mathit{integer} >$ on the stack top.
DUP	Duplicate the value of the stack top and push it on the stack top.
LD $< \mathit{address} >$	Push the value stored in the memory address $< \mathit{address} >$ on the stack top.
ST $< \mathit{address} >$	Pop the value at the stack top, and store it in the memory address $< \mathit{address} >$.
ADD	Pop the two values from the stack top, and push the sum on the stack top.
JMP_POS $< \mathit{address} >$	Pop the value at the stack top, and if the value is positive, then execute the instructions starting from memory address $< \mathit{address} >$.
JMP $< \mathit{address} >$	Execute the instructions starting from memory address $< \mathit{address} >$.
STOP	Stop execution.

Answer the following questions.

(1) Determine the value at the stack top and the integer value stored at the memory address 1000 after the execution of the following program. Note that the leading numbers of the lines show the memory addresses of the instructions.

```
00: PUSH_CNST 0
03: ST        1000
06: PUSH_CNST 10
09: DUP
10: LD        1000
13: ADD
```

```
14: ST        1000
17: PUSH_CNST -1
20: ADD
21: DUP
22: JMP_POS   09
25: STOP
```

(2) Extend the above stack machine so as to enable subroutine calls. Introduce a frame stack to enable recursion and local variables, and explain the frame structure. Define new instructions for subroutine calls and for accesses to data on the frame, and explain the meanings of the new instructions.

(3) Compile the following subroutine onto the extended stack machine.

```
int fib (int n)
{
   if (n > 2) return fib (n - 1) + fib (n - 2);
   return 1
}
```

(4) Programming language systems, such as Java, assume stack architectures as virtual machines. However the current mainstream architectures are register architectures. Discuss advantage(s) and disadvantage(s) of stack architectures compared with register architectures as virtual machines of programming language systems.