平成22年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成21年8月25日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

二分木のすべてのノードをたどり，ノードに格納されている整数の総和を計算したい．以下の問いに答えよ．ただし，プログラムはC言語で書くこととし，二分木のデータ構造は次のものを使え．

```
struct bintree {
  int val;
  struct bintree *left, *right;
};
```

(1) 再帰呼び出しを使って実現するプログラムを書け．

(2) 再帰呼び出しを使わず，スタックデータ構造を新たに定義し，これを用いて実現するプログラムを書け．

(3) 再帰呼び出しも使わず，新たなデータ構造も追加せずに，データ構造 `bintree` 中のポインタを変更しながら実現する方法を，まず言葉で簡潔に述べ，そしてプログラムを書け．

Problem 1

Consider traversing all the nodes in a given binary tree and summing up all the integers stored there. Answer the following questions. Here, write any program in C language and use the following definition for the binary tree data structure.

```
struct bintree {
  int val;
  struct bintree *left, *right;
};
```

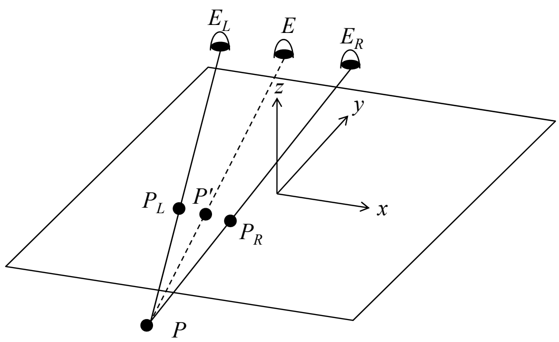
(1) Implement it by using recursive calls.

(2) Implement it not by using recursive calls, but by defining and using an additional data structure for stacks.

(3) There is a method to implement it not by using recursive calls nor by using an additional data structure, but by modifying the pointers in the `bintree` data structure. First describe briefly such a method by words. Then write down an implementation.

問題 2

立体視は 3 次元物体の奥行きを認識する方法のひとつである．投影面を $z = 0$ とする．また，同次座標系での点 (x, y, z, w) は，直交座標系での点 $(x/w, y/w, z/w)$ を表す．ただし $w \neq 0$ とする．以下の問いに答えよ．



(1) 最初に，片方の目が $E = (0, 0, R)$ の位置にあるとして，点 $P = (x, y, z, 1)$ を投影面に投影した点を $P' = (x', y', z', w)$ とする．この透視投影をあらわす変換行列 A_p は

$$(x', y', z', w) = (x, y, z, 1)A_p$$

を満たす．このとき A_p が以下のようになることを示せ．

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 点 P を $(d, 0, 0)$ だけ平行移動した点を $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 1)$ とし，この平行移動をあらわす変換行列を $A_t(d)$ とする．

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 1) = (x, y, z, 1)A_t(d)$$

を満たす変換行列 $A_t(d)$ を求めよ．

(3) 次に，左目の位置を $E_L = (-d, 0, R)$, 右目の位置を $E_R = (d, 0, R)$ とする．すると，次の行列により両眼に対する投影変換が表現できる．

$$\begin{aligned} A_L &= A_t(d)A_pA_t(-d) \\ A_R &= A_t(-d)A_pA_t(d) \end{aligned}$$

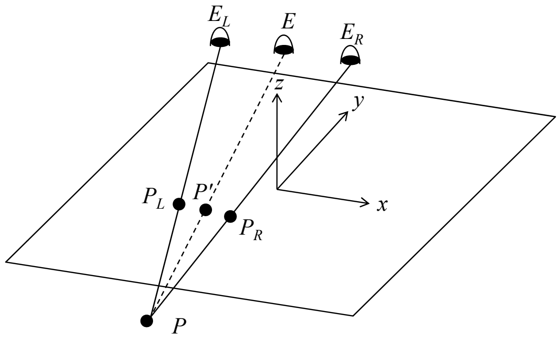
これらの行列 A_L, A_R を計算せよ．さらに，左目に対する点 $P = (x, y, z)$ の投影点 $P_L = (x_L, y_L, 0)$ および右目に対する投影点 $P_R = (x_R, y_R, 0)$ を求めよ．

(4) 頂点が $(0, \pm D/2, \pm R/2)$ にある長方形を仮定する．右目でこの長方形を見たときの投影面上の図形を図示せよ．

(5) 点 P が時刻 $t = 0$ に $(x_s, y_s, R/2)$ にあり，時刻 $t = 1$ に $(x_e, y_e, R/2)$ に，時刻 $t = 2$ に $(x_e, y_e, -R/2)$ に移動するものとする．また，点 P は $0 < t < 1$ および $1 < t < 2$ において等速直線運動をする．視差 $Q = P_L - P_R$ を時刻 t の関数として表せ．

Problem 2

Stereoscopic vision is a method to recognize depths of 3 dimensional objects. Let the projected plane be $z = 0$. The point (x, y, z, w) in the homogeneous coordinate system represents a point $(x/w, y/w, z/w)$ in the rectangular coordinate system, where $w \neq 0$. Answer the following questions.



(1) First let an eye be at $E = (0, 0, R)$ and the projection of a point $P = (x, y, z, 1)$ be $P' = (x', y', z', w)$. Show that a transform matrix of the projection A_p that satisfies

$$(x', y', z', w) = (x, y, z, 1)A_p$$

is represented as

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Let parallel translation of P by $(d, 0, 0)$ be $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 1)$ and the transform matrix that represents that parallel translation be $A_t(d)$. Show a representation of $A_t(d)$ that satisfies

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 1) = (x, y, z, 1)A_t(d).$$

(3) Next assume that the left eye is at $E_L = (-d, 0, R)$ and the right eye is at $E_R = (d, 0, R)$. Then the following matrices represent the projections of a point on the projected plane for the eyes.

$$\begin{aligned} A_L &= A_t(d)A_pA_t(-d), \\ A_R &= A_t(-d)A_pA_t(d). \end{aligned}$$

Calculate the above matrices A_L and A_R. Also determine the projected points of $P = (x, y, z)$, that is, $P_L = (x_L, y_L, 0)$ for the left eye and $P_R = (x_R, y_R, 0)$ for the right eye.

(4) Assume a rectangle whose vertices are at $(0, \pm D/2, \pm R/2)$. Plot the projection of this rectangle on the projected plane as seen by the right eye.

(5) Assume that the point P is at $(x_s, y_s, R/2)$ at time $t = 0$, at $(x_e, y_e, R/2)$ at time $t = 1$, and at $(x_e, y_e, -R/2)$ at time $t = 2$. P moves in uniform linear motion for $0 < t < 1$ and $1 < t < 2$. Give the parallax $Q = P_L - P_R$ as a function of time t.

問題 3

単一 CPU 計算機におけるラウンドロビン CPU スケジューリングを考える．なお，与えられたプロセス群は，プロセス番号の小さい順に実行可能待ち行列に入っている．プロセス切り替えにかかる時間は無視する．以下の問いに答えよ．

(1) 以下の 3 つのプロセスをラウンドロビンでスケジュールする．Time quantum (あるいは time slot) は 50 ミリ秒と仮定する．すなわち，プロセスは 1 回の CPU 実行権を得ると，最大 50 ミリ秒 CPU 時間を使うことができる．

プロセス	CPU 実行時間 (ミリ秒)
P_1	80
P_2	170
P_3	200

(a) プロセス実行の様子を示せ．

(b) 各プロセスのターンアラウンド時間を計算せよ．

(2) N 個のプロセス $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ のラウンドロビン CPU スケジューリングを考える．Time quantum を Q ミリ秒とし，プロセス P_i が必要とする CPU 実行時間を C_i ミリ秒とし，以下の式が成り立っていると仮定する．

$$C_i < C_j \quad \text{if} \quad i < j$$

$$Q < C_1$$

(a) プロセス P_1 のターンアラウンド時間 T_1 を求めよ．

(b) プロセス P_2 のターンアラウンド時間 T_2 をプロセス P_1 のターンアラウンド時間 T_1 を使って求めよ．

(c) プロセス P_i のターンアラウンド時間 T_i を求めよ．

Problem 3

Consider the round robin CPU scheduling in a single CPU computer. Note that processes are queued in the ready queue in ascending order of the process number, and ignore the time required by a process context switch. Answer the following questions.

(1) Consider that the following three processes are scheduled under the round robin scheduling. Let the time quantum (or time slot) be 50 milliseconds. That is, each process may run for at most 50 milliseconds when it gets scheduled.

Process	CPU Execution Time (milliseconds)
P_1	80
P_2	170
P_3	200

(a) Show how the processes are executed.

(b) Calculate the turnaround time of each process.

(2) Consider that N processes $(P_1, P_2, \ldots, P_N)$ run under the round robin scheduling. Let the time quantum be Q milliseconds, and let the required process execution time of process P_i be C_i milliseconds. Assume that the following formulas are satisfied:

$$C_i < C_j \quad \text{if} \quad i < j,$$

$$Q < C_1.$$

(a) Give the turnaround time T_1 of process P_1.

(b) Give the turnaround time T_2 of process P_2 using the turnaround time T_1 of process P_1.

(c) Give the turnaround time T_i of process P_i.

問題 4

$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ の乗算 $C = (c_{ij}) = AB$ が

$$c_{ij} = \min\{\, \max\{\, a_{ik},\ b_{kj}\,\} \mid k = 1, \ldots, n\,\}$$

により定められた代数系を考える．たとえば,

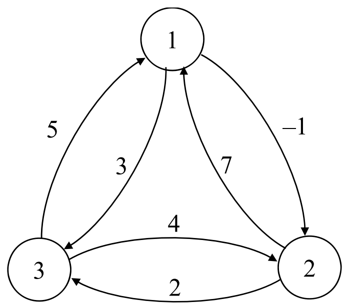
$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \min\{\max\{1,7\},\max\{2,3\}\} & \min\{\max\{1,1\},\max\{2,6\}\} \\ \min\{\max\{5,7\},\max\{10,3\}\} & \min\{\max\{5,1\},\max\{10,6\}\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．

(1) 次を計算せよ．

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 点 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ からなる完全有向グラフにおいて，点 v_i から点 v_j への有向枝の重みを d_{ij} とする．$d_{ii} = 0$ と定め，$n \times n$ 行列 $D = (d_{ij})$ を考える．たとえば，問い (1) の行列 D は以下のグラフを表す．



このとき，正の整数 l に対して D の l 乗の D^l のもつグラフ理論的意味を述べよ．

(3) D^n の対角要素で負のものがあるのは，D の表すグラフがどのような構造をもつ場合か？

(4) D が対称行列ですべての要素が非負の場合を考える．このとき，D^{n-1} を計算するアルゴリズムで，その計算量の点数 n に関するオーダができるだけ低いものを与えよ．その正当性を示すとともに，計算量解析も行うこと．

Problem 4

Consider an algebraic system where, for given $n \times n$ matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, the matrix product $C = (c_{ij}) = AB$ is defined by

$$c_{ij} = \min\{\,\max\{\,a_{ik},\ b_{kj}\,\} \mid k = 1, \ldots, n\,\}.$$

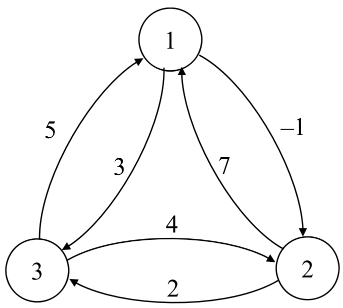
For example,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \min\{\max\{1,7\},\max\{2,3\}\} & \min\{\max\{1,1\},\max\{2,6\}\} \\ \min\{\max\{5,7\},\max\{10,3\}\} & \min\{\max\{5,1\},\max\{10,6\}\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(1) Compute the following product.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Consider a complete directed graph with n vertices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ with d_{ij} as the weight of the arc from vertex v_i to vertex v_j. Let d_{ii} be 0, and consider an $n \times n$ matrix $D = (d_{ij})$. For example, the matrix D in the question (1) represents the following graph.



Describe graph-theoretic meanings of D^l, the l-th power of D, for positive integer l.

(3) What structure does the graph represented by D have when there exists a negative diagonal in D^n?

(4) Suppose that D is a symmetric matrix and its elements are all nonnegative. Devise a fast algorithm to compute D^{n-1} which has low time complexity with respect to n. Show its validity and computational complexity.

平成22年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 II

平成21年8月25日
13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 4 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 4 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

有限集合 Σ 上の語を受理する 2 つの非決定性有限オートマトン（以下，NFA と略す）$A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, Q_0^i, F_i)(i = 1, 2)$ が与えられたとする．ただし，Q_i は状態の集合，δ_i は状態遷移関係，Q_0^i は初期状態の集合，および F_i は受理状態の集合である．このとき，Q_1 と Q_2 の間の関係 $R \subseteq Q_1 \times Q_2$ が A_1 と A_2 の間の等価関係である，ということを，次のように定義する．

(A) 任意の $s_1 \in Q_0^1$ について，$s_1\ R\ s_2$ となるような $s_2 \in Q_0^2$ が存在する．

(B) 任意の $s_1, s_1' \in Q_1$，$s_2 \in Q_2$，$\sigma \in \Sigma$ について，

$s_1\ R\ s_2$ かつ $s_1 \xrightarrow{\sigma} s_1' \in \delta_1$ が成り立つならば，$s_1'\ R\ s_2'$ かつ $s_2 \xrightarrow{\sigma} s_2' \in \delta_2$ が成り立つような，$s_2' \in Q_2$ が存在する．

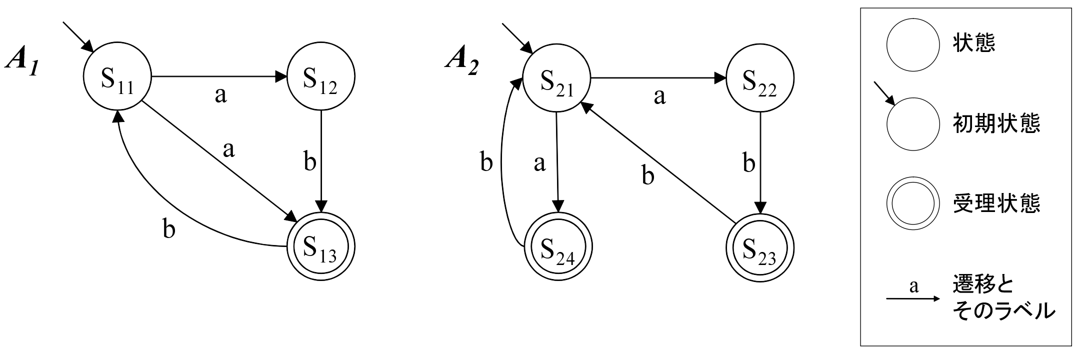
(C) 任意の $s_1 \in F_1$, $s_2 \in Q_2$ について，$s_1\ R\ s_2$ が成り立つならば，$s_2 \in F_2$ も成り立つ．

(D) 以上 3 項目とも，A_1 と A_2 を入れ替えても成り立つ.（たとえば，(A) に関しては,「任意の $s_2 \in Q_0^2$ について，$s_1\ R\ s_2$ となるような $s_1 \in Q_0^1$ が存在する」が成り立つ.）

また， A_1 と A_2 の間に等価関係が存在するとき，A_1 と A_2 は等価である，という．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 図の NFA A_1 と A_2 に対し，次の関係 R は A_1 と A_2 の間の等価関係であることを示せ．

$$R = \{(S_{11}, S_{21}),\ (S_{12}, S_{22}),\ (S_{13}, S_{23}),\ (S_{13}, S_{24})\}$$



(2) 同一の言語を受理するが，等価ではない 2 つの NFA の例を示せ．

Problem 1

Consider two nondeterministic finite automata (NFA) $A_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, Q_0^i, F_i)(i = 1, 2)$ accepting string languages over a finite set Σ. Here, Q_i is a set of states, δ_i is a state transition relation, Q_0^i is a set of initial states, and F_i is a set of accepting states. We define that a relation $R \subseteq Q_1 \times Q_2$ between Q_1 and Q_2 is an equivalence relation between A_1 and A_2 when all the following conditions hold.

(A) For all $s_1 \in Q_0^1$, there is $s_2 \in Q_0^2$ such that $s_1 \; R \; s_2$.

(B) For all $s_1, s_1' \in Q_1, \; s_2 \in Q_2, \; \sigma \in \Sigma$,

If $s_1 \; R \; s_2$ and $s_1 \xrightarrow{\sigma} s_1' \in \delta_1$, then there is $s_2' \in Q_2$ such that $s_1' \; R \; s_2'$ and $s_2 \xrightarrow{\sigma} s_2' \in \delta_2$.

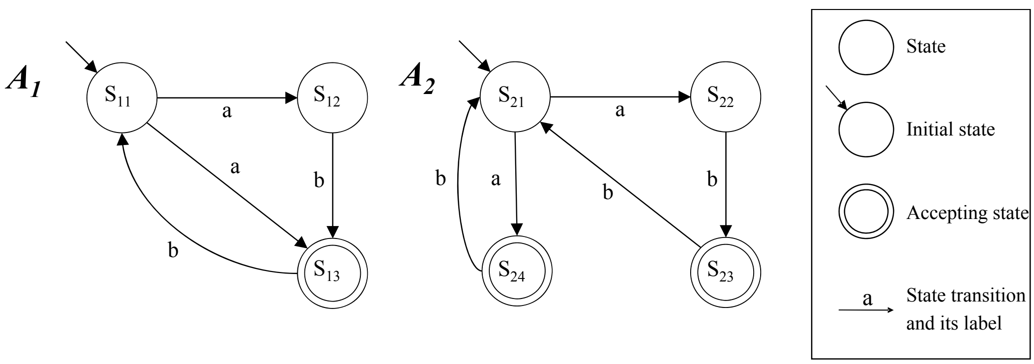
(C) For all $s_1 \in F_1, \; s_2 \in Q_2$, if $s_1 \; R \; s_2$, then $s_2 \in F_2$.

(D) Each above condition still holds if we swap A_1 and A_2. (For example, this means for (A) that "for all $s_2 \in Q_0^2$, there is $s_1 \in Q_0^1$ such that $s_1 \; R \; s_2$.")

In addition, A_1 and A_2 are said to be equivalent when there is an equivalence relation between them. Answer the following questions.

(1) Show that the following relation R is an equivalence relation between the NFAs A_1 and A_2 given in the figure.

$$R = \{(S_{11}, S_{21}), \; (S_{12}, S_{22}), \; (S_{13}, S_{23}), \; (S_{13}, S_{24})\}$$



(2) Show two NFAs that accept the same language but are not equivalent.

問題 2

s_n を文字 'A' を n 個並べた文字列とする．s_n に対し，任意の位置に任意の数の文字 'B' をいくつか挿入してできる文字列の集合を E_n とおく．ただし，E_n は s_n 自身を含むものとする．たとえば，$s_5 =$AAAAA に対して，先頭に 2 つ，3 文字目と 4 文字目の間に 3 つの B を挿入して出来る文字列 BBAAABBBAA は E_5 に含まれる．

2 つの文字列 p, q が同じ長さ，かつ同じ位置に B を持たない時 (すなわち，文字列 r の i 番目の文字を $r[i]$ と表現するとして，$p[i] = q[i] =$B が成立する i が存在しない時)，$p \bigodot q$ と書くものとする．さらに，$n \geq 0, m \geq 0$ に対して，$x \bigodot y$，$x \in E_n, y \in E_m$ を満たす (x, y) の数を $N_{n,m}$ とする．ただし，$N_{0,0} = 1$ とする．

以下の問いに答えよ．

(1) $N_{2,2}$ および $N_{2,3}$ を求めよ．

(2) $n \geq 1, m \geq 1$ に対し，$N_{n,m}$ を $N_{n-1,m}, N_{n,m-1}, N_{n-1,m-1}$ を用いて表せ．

(3) $N_{1,n}$ および $N_{2,n}$ を n に関する数学的関数で表せ．

(4) $N_{n,m} \leq \{2(n+m)\}^n/n!$ であることを証明せよ．

Problem 2

Let s_n be a string of length n that consists of only 'A' characters. Let E_n denote the set of strings that can be made by inserting an arbitrary number of 'B' characters into arbitrary positions of s_n. Note that E_n includes s_n itself. For example, E_5 includes a string BBAAABBBAA, which is made from s_5 =AAAAA by inserting two Bs before the entire string s_5 and three Bs between the 3rd and the 4th characters of s_5.

Let $p \bigodot q$ denote that two strings p and q have the same length and the two strings have no Bs at the same position (*i.e.*, there is no i such that $p[i] = q[i] =$B, where $r[i]$ denotes the i-th character of string r). For $n \geq 0$, $m \geq 0$, let $N_{n,m}$ denote the number of pairs (x, y) such that $x \bigodot y$, $x \in E_n$, and $y \in E_m$. Let $N_{0,0} = 1$.

Answer the following questions.

(1) Calculate $N_{2,2}$ and $N_{2,3}$.

(2) Formulate $N_{n,m}$ with $N_{n-1,m}$, $N_{n,m-1}$ and $N_{n-1,m-1}$ for $n \geq 1$, $m \geq 1$.

(3) Formulate $N_{1,n}$ and $N_{2,n}$ with n.

(4) Prove that $N_{n,m} \leq \{2(n + m)\}^n/n!$.

問題 3

A は $n \times n$ の実対称行列（n は 3 以上の整数）とする．

A の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ とし，それぞれに対応する固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする．さらに，

$$\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_i = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

および

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$$

を仮定する．ただし $\boldsymbol{u}^\top$ は $\boldsymbol{u}$ の転置をあらわす．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ は実数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ により

$$\boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{u}_i$$

で表されるとする．$A\boldsymbol{x}_0$ を $\xi_i, \lambda_i, \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて表せ．

(2) $\xi_1 \neq 0$ とし，$k = 1, 2, \ldots$ に対して $\boldsymbol{x}_k$ を

$$\boldsymbol{x}_k = \frac{1}{\|A\boldsymbol{x}_{k-1}\|} A\boldsymbol{x}_{k-1}$$

で定義する．

$k \to \infty$ において $\boldsymbol{x}_k$ は $\boldsymbol{u}_1$ と平行になることを示せ．

(3) $\xi_1 = 0$ かつ $\xi_2 \neq 0$ の場合に問い (2) と同じように $\boldsymbol{x}_k$ を計算するとどうなるか．まず，丸め誤差のない実数演算を仮定した場合を論じよ．次に，丸め誤差のある浮動小数点数演算を仮定した場合を論じよ．

(4) 行列 A_1 を，

$$A_1 = A - \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^\top$$

で定義する． A_1 の固有値と固有ベクトルを示せ．

(5) 問い (4) の結果を用いて $\boldsymbol{u}_2$ と λ_2 の近似値を求める方法を示せ．なお，$\boldsymbol{u}_1$ と λ_1 の十分良い近似値，ならびに

$$\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{u}_i, \qquad \eta_2 \neq 0$$

を満たす $\boldsymbol{y}_0$ があるとしてよい．

Problem 3

Assume that A is an $n \times n$ real symmetric matrix, where n is an integer larger than 2.

Let the eigenvectors of A be $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_n$ and their corresponding eigenvalues be λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n. Assume that

$$\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_i = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

and

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0,$$

where $\boldsymbol{u}^\top$ represents the transpose of $\boldsymbol{u}$. Answer the following questions.

(1) Assume a vector $\boldsymbol{x}_0$ that is represented as

$$\boldsymbol{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{u}_i$$

with real numbers ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n. Represent $A\boldsymbol{x}_0$ with ξ_i, λ_i, $\boldsymbol{u}_i$ ($i = 1$, 2, $\ldots$, n).

(2) Let $\xi_1 \neq 0$, and define $\boldsymbol{x}_k$ as

$$\boldsymbol{x}_k = \frac{1}{\|A\boldsymbol{x}_{k-1}\|} A\boldsymbol{x}_{k-1}$$

for $k = 1$, 2, $\ldots$.

Prove that $\boldsymbol{x}_k$ approaches parallel to $\boldsymbol{u}_1$ when $k \to \infty$.

(3) What if $\boldsymbol{x}_k$ is computed as question (2) when $\xi_1 = 0$ and $\xi_2 \neq 0$? First discuss it assuming real number operations without rounding errors. Next discuss it assuming floating-point number operations with rounding errors.

(4) Define matrix A_1 as

$$A_1 = A - \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^\top.$$

Give the eigenvalues and the eigenvectors of A_1.

(5) Give a method that computes approximations of $\boldsymbol{u}_2$ and λ_2 using the results of question (4). You can assume that you have good approximations of $\boldsymbol{u}_1$ and λ_1, and that you have $\boldsymbol{y}_0$ satisfying

$$\boldsymbol{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{u}_i, \qquad \eta_2 \neq 0.$$

問題 4

モールス信号列を ASCII 文字列に変換する論理回路を以下の手順に従って構成せよ．

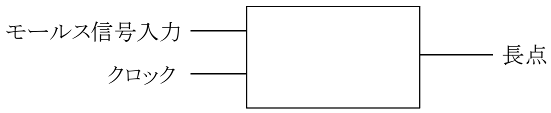
モールス信号列は，長点，短点，長スペース，短スペースで構成される．一文字は，合計 6 個以下の長点または短点が，短スペースにより区切られた列であらわされ，一文字の前後は，長スペースにより区切られる．

回路には外部からクロックが供給される．長点，短点の区別および長スペース，短スペースの区別は，

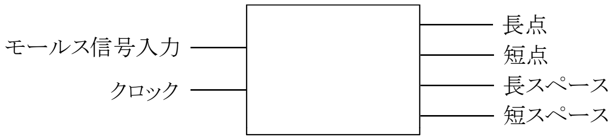
- 入力信号が H レベルである時間が 1 から 2 クロック時間の場合には短点
- 入力信号が H レベルである時間が 4 クロック時間以上の場合には長点
- 入力信号が L レベルである時間が 1 から 2 クロック時間の場合には短スペース
- 入力信号が L レベルである時間が 4 クロック時間以上の場合には長スペース

である．なお，入力信号が H または L レベルである時間が 3 クロック時間の場合は入力にはないと仮定してよい．

(1) モールス信号入力とクロックを入力とし，モールス信号入力が長点の場合に長点出力信号を 1 クロックの間出力する論理回路を設計せよ．論理回路設計は，D-フリップフロップ，AND, OR, NOT ゲートを用いて構成すること．長点出力信号を出力するタイミングは，長点が終了した時点，またはそれから数クロック遅れた時点でよい．



(2) モールス信号入力とクロックを入力とし，モールス信号入力にしたがって，長点出力信号，短点出力信号，長スペース出力信号，短スペース出力信号を 1 クロックの間出力する論理回路を設計せよ．論理回路設計は，D-フリップフロップ，AND, OR, NOT ゲートを用いて構成すること．



(3) 問い (2) で作った回路と D-フリップフロップ，AND, OR, NOT ゲートおよびメモリを組み合わせ，モールス信号入力を ASCII コードに変換する論理回路を設計せよ．なお，モールス信号から ASCII コードへの変換表はメモリにあらかじめ入っているとしてよい．

(注：本問題のモールス信号は出題のため変更されており，標準とは異なる．)

Problem 4

Following the directions below, construct a logic circuit that converts Morse codes to ASCII strings.

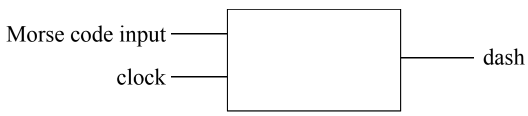
Morse codes consist of dashes, dots, long gaps, and short gaps. A character is represented by up to six dashes or dots in total that are each separated by a short gap. Characters are each separated by a long gap.

A clock signal is supplied from the external to the circuit. Dashes, dots, long gaps, and short gaps are distinguished as follows:

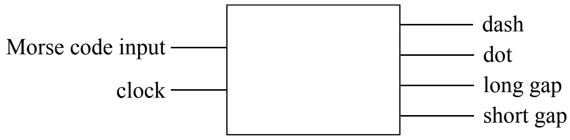
- The input remaining at "high" level for 1 or 2 clock cycles represents a dot.
- The input remaining at "high" level for 4 clock cycles or more represents a dash.
- The input remaining at "low" level for 1 or 2 clock cycles represents a short gap.
- The input remaining at "low" level for 4 clock cycles or more represents a long gap.

Assume that the input never remains at "high" or "low" level for 3 clock cycles.

(1) Design a logic circuit that receives clock signals and Morse codes and outputs a "dash" signal for one clock cycle when the input Morse code represents a dash. The circuit may consist of only AND gates, OR gates, NOT gates, and D-flip flops. A "dash" signal can be sent just after the completion of the "dash" input, or several clock cycles later.



(2) Design a logic circuit that receives clock signals and Morse codes and outputs a "dash", "dot", "long gap", or "short gap" signal for one clock cycle that is represented in the input Morse code. The circuit may consist of only AND gates, OR gates, NOT gates, and D-flip flops.



(3) Design a logic circuit that converts Morse codes to ASCII codes by combining the circuit constructed in question (2) with AND gates, OR gates, NOT gates, and D-flip flops as well as a memory. Assume that the memory already has a Morse-ASCII mapping table.

(Remark: Morse code is modified in this problem and different from the standard.)