平成21年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

数学

平成21年2月3日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 2 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 2 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

複素数 z に対して写像

$$f(z) = \frac{3z+2}{-2z-1}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f の逆写像を求めよ．

(2) 写像 f に対して写像 g

$$g(z) = -\frac{1}{z} + a$$

が $g^{-1}(f(g(z))) = bz + c$ を満たす．このとき，a, b, c を求めよ．ただし，a, b, c は実数とする．

(3) $n \geq 1$ に対して f の n 回写像 $f^{(n)}(z)$ を求めよ．ただし n 回写像は $f^{(0)}(z) = z$ および $f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z))$ で定義される．

(4) $z = x + iy$ において，(x, y) は R^2 上で円 $(2x+1)^2 + 4y^2 = 1$ 上を動く．このとき，$|f(z)|$ の最大値を求めよ．

Problem 1

Consider the mapping

$$f(z) = \frac{3z+2}{-2z-1}$$

for a complex number z. Answer the following questions.

(1) Give the inverse mapping of f.

(2) Let the mapping g

$$g(z) = -\frac{1}{z} + a$$

satisfy $g^{-1}(f(g(z))) = bz + c$. Determine a, b, and c, which are real numbers.

(3) Give functional powers $f^{(n)}(z)$ for $n \geq 1$. Functional power is defined as $f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z))$ and $f^{(0)}(z) = z$.

(4) Let $z = x + iy$ and (x, y) be on the circle $(2x+1)^2 + 4y^2 = 1$ of R^2. Give the maximum of $|f(z)|$.

問題 2

連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

の解を求めることを考える．ここで A, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ は，それぞれ $m \times n$ の行列，n 次元ベクトル，m 次元ベクトルであるとする．なお，A の階数は $\min\{n, m\}$ であるとする．

(1) $m = n = 3$ の場合を考える．A と $\boldsymbol{b}$ が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる時に，式 [1] を満たす $\boldsymbol{x}$ の値を求めよ．

(2) $m > n$ の場合を考える．このとき，$\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$ が最小となるような，n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\|\cdot\|$ はベクトルの 2 ノルムを表す.

(3) $m < n$ の場合を考える．このとき，式 [1] を満たしながら $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top H\boldsymbol{x}$ が最小になるような $\boldsymbol{x}$ は

$$\begin{pmatrix} H & A^\top \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{2}$$

を満たすことを示せ．ただし，ここで H は対称正定値行列であるとし，$\boldsymbol{y}$ はラグランジュ乗数を表す m 次元ベクトルとする．また，O は $m \times m$ の行列で，全要素が 0 であるとする．

(4) 式 [2] より，$\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = H^{-1}A^\top(AH^{-1}A^\top)^{-1}\boldsymbol{b}$$

となることを示せ.

Problem 2

Consider solving a system of linear equations

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{[1]}$$

where A, $\boldsymbol{x}$, and $\boldsymbol{b}$ are an $m \times n$ matrix, an n-vector, and an m-vector, respectively. Assume that the rank of A is $\min\{n, m\}$.

(1) Let $m = n = 3$. Calculate the $\boldsymbol{x}$ that satisfies equation [1] when A and $\boldsymbol{b}$ are given as

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Let $m > n$. Give the $\boldsymbol{x}$ that minimizes $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|$. Here, $\|\cdot\|$ represents a vector 2-norm.

(3) Let $m < n$. Show that the $\boldsymbol{x}$ that satisfies equation [1] and minimizes $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top H\boldsymbol{x}$ is a solution of

$$\begin{pmatrix} H & A^\top \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}. \tag{[2]}$$

Here, H is a symmetric positive definite matrix, and $\boldsymbol{y}$ is an m-vector (Lagrange multiplier). O is an $m \times m$ matrix whose entries are zeros.

(4) From equation [2], show that $\boldsymbol{x}$ is given as

$$\boldsymbol{x} = H^{-1}A^\top(AH^{-1}A^\top)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

平成21年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 I

平成21年2月4日
10:00 – 12:30

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

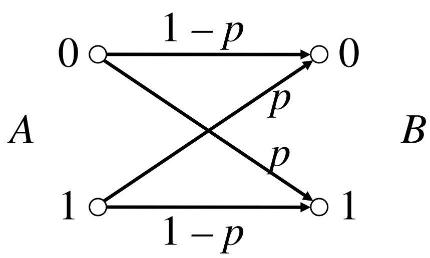
(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

下図に示す誤り確率 $p < 1/2$ の 2 元対称通信路に関する以下の問いに答えよ．入力を A，出力を B で表す．入力 A は値 0 を確率 q で，値 1 を確率 $1-q$ で取るとする．



(1) 出力 B が 0 となる確率 r を求めよ．

(2) B のエントロピー $H(B)$ を r で表せ．

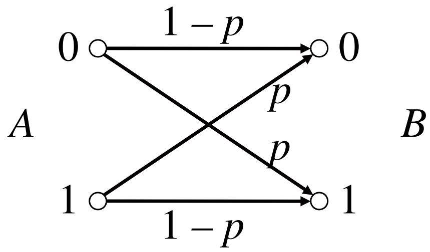
(3) 条件付きエントロピー $H(B \mid A)$ を求めよ．

(4) 通信路容量 C は，入力の出現確率 q を変化させたときの，相互情報量 $I(A;B) = H(B) - H(B \mid A)$ の最大値である．この最大値が $r = 1/2$ のときに達成されることを示せ．

(5) 通信路容量 C を p で表せ．また，p の関数としての C のグラフの概形を示せ．

Problem 1

Answer the following questions about the binary symmetric channel of crossover probability $p < 1/2$ as shown in the figure below. Let A be the input and B be the output. Let q be the probability that the input A is 0, and $1 - q$ be the probability that A is 1.



(1) Give the probability r that the output B is 0.

(2) Represent $H(B)$, the entropy of B, in terms of r.

(3) Give the conditional entropy $H(B \mid A)$.

(4) Channel capacity C is the maximum of the mutual information $I(A; B) = H(B) - H(B \mid A)$ over the input probability q. Show that the maximum is attained when $r = 1/2$.

(5) Represent the channel capacity C in terms of p. Draw the graph of C as a function of p.

問題 2

整数をクイックソートによって整列することを考える．ただし，すべての要素の値は異なっているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 以下の擬似コードは列 A をその場で整列するものであるが，このままでは正しく動作しないことがある．問題を指摘して訂正せよ．

```
Quicksort(列 A){
  A の大きさが 1 以下なら何もせずに戻る.
  ピボット p として A の先頭の要素を選ぶ.
  A の中で順序を入れ替え，p より小さいものを前半に，p 以上のものを後半に集める.
  A の前半，後半をそれぞれ Quicksort で整列する.
}
```

(2) 上記の訂正されたクイックソートアルゴリズムによって以下の整数列をソートする過程を示せ．41, 12, 23, 78, 56, 32, 16, 66

(3) クイックソートの計算量が平均 $O(n \log n)$ であることを示せ

(4) クイックソートをより高速化する手法をひとつ挙げて説明せよ．

Problem 2

Consider sorting an array of integers using Quicksort. Assume that all elements are different. Answer the following questions.

(1) The following psuedocode sorts an array A in place, but it does not always work correctly as it is. Identify the problem and fix it.

Quicksort(array A){
  If the size of A is equal to or smaller than 1, then return.
  Select the first element of A as pivot p.
  Reorder the elements of A so that the elements smaller than p are in the first part and the elements equal to or greater than p are in the second part.
  Sort the first and the second parts independently using Quicksort.
}

(2) Show the process of sorting the following array using the correct Quicksort. 41, 12, 23, 78, 56, 32, 16, 66

(3) Show that the computational complexity of Quicksort is $O(n \log n)$ on average.

(4) Describe a method to further accelerate Quicksort.

問題 3

次ページ Figure 1 のプログラムは，ある端末デバイスドライバの一部である．`io` 変数は，デバイスレジスタのメモリアドレスを保持している．`write` 関数は，引数で渡された文字を端末に表示する．`read` 関数は，端末から入力された文字を返す．`spin_lock`，`spin_unlock` 関数は，スレッドの排他実行制御機構を実現している．以下の問いに答えよ．

(1) 本デバイスドライバのプログラムから，デバイスの仕様を推測し，仕様を記述せよ．

(2) 2 つのスレッド T1, T2 を仮定する．T1 は `read` 関数内で端末入力を待っているとき，T2 が write 関数を呼ぶ状況を考える．このとき，T2 のスレッドの write 関数の処理は，端末からデータが入力されるまで待たされてしまう．この問題を解決するために，プログラムを修正せよ．問い (1) で答えたデバイス仕様から，修正したプログラムが正しく動作することを説明せよ．

(3) 本端末は，キー入力があると割り込みを発生させることができると仮定する．Figure 2 に示す通り，割り込み発生時に読み込み処理を行う `tty_intr` 関数を定義した．`wakeup` 関数は引数に `event_t` 型変数をとり，本変数に関連付けられたスレッドを実行状態にする．スレッドを休眠状態にするための関数として，`event_t` 型を引数にとる `sleep` 関数が定義されているとする．

本デバイスドライバと協調するように `read` 関数を書き直せ．ただし，`read` 関数実行時，CPU は割り込み禁止モードとなり，`read` 関数内でプロセスが休眠するとき，CPU は割り込み可能モードとなると仮定する．`read` 関数の実行が再開すると，それ以降の `read` 関数プログラムは，割り込み禁止モードで実行されると仮定する．

Problem 3

Figure 1, given in the next page, shows a part of a terminal device driver program. The `io` variable keeps the start memory address of the device registers. The `write` function displays the character passed by the argument. The `read` function returns a character input from the terminal. The `spin_lock` and `spin_unlock` functions implement mutual exclusion among threads. Answer the following questions.

(1) Guess the specification of the terminal device from the program, and describe it.

(2) Consider two threads, T1 and T2. Consider also the situation that T1 is waiting for an input data at the `read` function, and at that time T2 calls the `write` function. In this case, T2 must wait until an input data arrives. Modify the `read` function to solve this problem. Describe why the modified function works according to the specification answered in the question (1).

(3) Assume that the terminal device may raise an interrupt when a key is pressed. The `tty_intr` function, defined in Figure 2, is the interrupt handler for the terminal device. The `wakeup` function wakes up the thread associated with the `event_t` variable. A thread may sleep when it calls the `sleep` function, whose argument is the `event_t` data type.

Rewrite the `read` function so that it cooperates with the device driver. Assume that all the interrupts are disabled when the `read` function is executed, and when the thread sleeps in the `sleep` function, the interrupts are enabled. Assume also that after resuming the execution of the `read` function, all the interrupts are disabled during execution of the rest of `read` code.

```
#define F_CMDREADY 1
#define F_WDONE    2
#define F_RDONE    4
#define F_WRITE    1
#define F_READ     2
typedef struct ioreg {
   volatile int  stat;
   volatile int  cmd;
   volatile int  indt;
   volatile int  outdt;
} ioreg;
ioreg  *io = (ioreg*) 0xfff00000;
lock_t  lk;
void write(char dt) {
  spin_lock(&lk);
  while (!(io->stat & F_CMDREADY));
  io->outdt = dt;
  io->cmd = F_WRITE;
  while (!(io->stat & F_WDONE));
  spin_unlock(&lk);
}
char read() {
  char   d;
  spin_lock(&lk);
  while (!(io->stat & F_CMDREADY));
  io->cmd = F_READ;
  while (!(io->stat & F_RDONE));
  d = io->indt;
  spin_unlock(&lk);
  return d;
}
```

Figure 1. write/read code

```
#define SIZE 32
volatile int cnt;
int icnt;
event_t  evt;
char  buf[SIZE];
void tty_intr() {
  spin_lock(&lk);
  while (!(io->stat & F_CMDREADY));
  io->cmd = F_READ;
  while (!(io->stat & F_RDONE));
  if (cnt < SIZE) {
     buf[icnt] = io->indt;
     icnt = (icnt + 1) % SIZE;
     cnt++;
  }
  spin_unlock(&lk);
  wakeup(&evt);
}
```

Figure 2. tty_intr code

平成21年度
東京大学大学院情報理工学系研究科
コンピュータ科学専攻
入学試験問題

専門科目 II

平成21年2月4日
13:30 – 16:00

注意事項

(1) 試験開始の合図があるまで, この問題冊子を開けないこと.
Do not open this problem booklet until the start of the examination is announced.

(2) 3 題すべてに答えよ. 問題ごとに指定された解答用紙を使用すること.
Answer the following 3 problems. Use the designated answer sheet for each problem.

(3) 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.
Do not take the answer sheets and the problem booklet out of the examination room.

下欄に受験番号を記入すること.
Fill the following blank with your examinee's number.

受験番号	No.

問題 1

A を $n \times n$ の実対称行列として，以下の問いに答えよ．ただし，n は 2 以上の整数とする．なお，行列 A の (i,j) 要素を A_{ij} で，A の転置を $A^\top$ で表す．

(1) 整数 p, q は 1 以上 n 以下で，$p \neq q$ とする．また，$A_{pq} = A_{qp} \neq 0$ とする．行列 P を

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ かつ } i \notin \{p,q\} \\ c & i = j \text{ かつ } i \in \{p,q\} \\ s & i = p \text{ かつ } j = q \\ -s & i = q \text{ かつ } j = p \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．ただし c と s は実数で $c^2 + s^2 = 1$ を満たす．

$$B = P^\top A P$$

とおくとき，$B_{pq} = 0$ となるような c と s を求めよ．

(2) 一般に，行列 A の非対角要素の平方和を

$$S(A) = \sum_{i \neq j} A_{ij}^2$$

と書くことにする．問い (1) のように P と B を決めるとき，$S(A) - S(B)$ を求めよ．

(3) 以上の結果を用いて，

$$Q_k^\top A Q_k \to D \qquad k \to \infty$$

(D は対角行列) となるような直交行列 Q_k ($k = 1, 2, \ldots$) を求めるアルゴリズムを示せ．

Problem 1

Let A be an $n \times n$ real symmetric matrix, where $n \geq 2$ is an integer. Answer the following questions.

The (i, j) element of matrix A will be represented as A_{ij}, and the transpose of A will be represented as $A^\top$.

(1) Let p and q be integers with $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, and $p \neq q$. Assume that $A_{pq} = A_{qp} \neq 0$. Define matrix P as follows:

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ and } i \notin \{p, q\} \\ c & i = j \text{ and } i \in \{p, q\} \\ s & i = p \text{ and } j = q \\ -s & i = q \text{ and } j = p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Here c and s are real numbers with $c^2 + s^2 = 1$. Let

$$B = P^\top AP.$$

Determine c and s so that $B_{pq} = 0$.

(2) Represent the sum of squares of the off-diagonal elements of a matrix A as

$$S(A) = \sum_{i \neq j} A_{ij}^2.$$

Give $S(A) - S(B)$ for P and B determined as question (1).

(3) Using the above results, show an algorithm to obtain a series of orthogonal matrices Q_k $(k = 1, 2, \dots)$ that gives

$$Q_k^\top A Q_k \to D \qquad k \to \infty,$$

where D is a diagonal matrix.

問題 2

今年は X 社には n 人の新入社員が入社して来た．X 社には k 個の部門があり，そのいずれかにそれぞれの新入社員を配属させる必要がある．なお，それぞれの部門には受け入れ可能な人数の上限がある．一方，X 社人事部では，それぞれの新入社員に配属を希望する部門をそれぞれ 2 つ聞いているものとする．ここで，X 社人事部では，その配属先決定方法として現在以下の 2 つの配属方法を検討中である．

方法 A 新入社員は入社前に入社試験を受けている．このとき，成績のよかった者から順に，以下のように配属を行っていく．新入社員 P の希望する配属部門 2 つのうち，まだ配属されている新入社員の数がその上限を超えていないものがあれば，P をその部門に（2 つとも可能であればどちらかランダムに）配属させる．そのような部門がない場合は，まだ受け入れ可能な部門の中から，ランダムに部門を選ぶ．

方法 B 成績には関係なく，最も多くの新入社員の希望を満たすような配属を考える．

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $n = k = 3$ の場合で，方法 A による方法によって希望を満たされる新入社員の数が方法 B によるよりも少なくなるような例をあげよ．

(2) 方法 A を計算するアルゴリズムとその計算量を述べよ．

(3) 方法 B を計算するアルゴリズムとその計算量を述べよ．

Problem 2

Company X has hired n new employees this year. Company X has k divisions and each new employee must be assigned to one of the divisions. There is an upper bound of the number of employees that can be assigned to each division. On the other hand, each employee reported two of the divisions that he or she wishes to be assigned to, to the personnel of company X. Now the personnel of company X examines the following two assignment plans to take.

Plan A The new employees have taken a test for employment before they are hired. We assign employees one by one in the order of their scores, as follows. If any one of the two divisions that the employee P wishes has assignees less than the upper bound, assign P to that division. If both have less number of assignees than their upper bounds, choose randomly one of them. If both of the two divisions are already full, assign P to a division randomly chosen from divisions that are not full.

Plan B Irrelevant to the scores, assign new employees to divisions so as to maximize the number of new employees whose hopes are fulfilled.

Answer the following questions.

(1) Show an example that the number of new employees whose wishes are fulfilled is smaller in the plan A than in the plan B, in case $n = k = 3$.

(2) Show an algorithm that computes the plan A, and describe the computational complexity of it.

(3) Show an algorithm that computes the plan B, and describe the computational complexity of it.

問題 3

以下の問いに答えよ。

(1) 集合 $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ は a を奇数個含む $\}$ を受理する決定的オートマトンを示せ。

(2) 集合 $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ は b を 3 の倍数個含む $\}$ を受理する決定的オートマトンを示せ。

(3) 集合 $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ は a を奇数個含み、b を 3 の倍数個含む $\}$ を受理する決定的オートマトンを示せ。

Problem 3

Answer the following questions.

(1) Show a deterministic automaton that accepts the set
$\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contains an odd number of a's$\}$.

(2) Show a deterministic automaton that accepts the set
$\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contains a multiple-of-3 number of b's$\}$.

(3) Show a deterministic automaton that accepts the set
$\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contains an odd number of a's and a multiple-of-3 number of b's$\}$.